

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA
E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO**

CAMPUS SÃO PAULO

DÉBORA VIEIRA DE SOUZA

**O ENSINO DE NOÇÕES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
POR MEIO DA APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS**

SÃO PAULO

2016

DÉBORA VIEIRA DE SOUZA

O ENSINO DE NOÇÕES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL POR MEIO
DA APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca

SÃO PAULO

2016

S714e Souza, Débora Vieira de.

O Ensino de Noções de Cálculo Diferencial e Integral por meio da Aprendizagem Baseada em Problemas / Débora Vieira Souza.

São Paulo: [s.n.], 2016.

159 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2016.

1. Cálculo Diferencial e Integral.
 2. Ensino e aprendizagem
 3. Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL)
- I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. II. Título

CDU 510

DÉBORA VIEIRA DE SOUZA

O ENSINO DE NOÇÕES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL POR MEIO
DA APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS

Dissertação apresentada e aprovada
em 14 de março de 2016 como
requisito parcial para obtenção do
título de Mestre em Ensino de Ciências
e Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca
IFSP – Câmpus São Paulo
Orientador e Presidente da Banca

Profa. Dra. Graziela Marchi Tiago
IFSP – Câmpus São José dos Campos
Membro da Banca

Prof. Dr. Carlos Ricardo Bifi
FATEC - SP
Membro da Banca

Aos Meus Pais
A Joana (in memoriam)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por ter me concedido luz, forças e paz para continuar lutando pelos meus estudos e ideais, mesmo em meio a tantas dificuldades. Sou grata a Ele por essa preparação e, maiormente, por tê-lo e senti-lo sempre perto de mim.

Agradeço aos meus amáveis pais, Aldimir e Fátima, por todo incentivo, ajuda e paciência que tiveram ao longo dessa trajetória. Por tantas vezes falarem o que eu precisava ouvir e por se calarem, quando percebiam que eu precisava me encontrar.

Meus agradecimentos ao meu irmão Ranulfo por me auxiliar em vários momentos difíceis e por ter me apoiado sempre.

Sou grata a Joana (in memoriam), ao seu Dito e a Ana Paula Bazzana, pessoas que em toda sua simplicidade e grandiosidade, sempre falavam sobre a importância dos estudos, de uma boa formação.

Sinto uma gratidão especial à minha amiga Cintia Silva, não apenas por ter compartilhado a informação a respeito do curso, mas por termos passado por todo processo seletivo juntas, nos preparando, nos ajudando. Mediante nossos medos, não há como esquecer sua frase: “O que nós temos além do nosso esforço e dedicação, é a nossa fé”. E foi a partir desse momento que realmente acreditei que poderíamos alcançar algo, mesmo quando nossas esperanças pareciam se esgotar.

Meus sinceros agradecimentos ao meu amigo Jorge Santos o qual durante as etapas do processo seletivo muito me ajudou e aconselhou.

Agradeço aos professores que fizeram parte de minha trajetória como estudante. De algum modo, suas experiências, positivas ou não, me fizeram ser a profissional que hoje sou.

Sou grata aos colegas de trabalho e amigos que ao longo desses dez anos participaram de minha vida docente. Em especial, alguns, como os professores Ricardo Pucinelli, Evanilson Carvalho e Meire Domingues, que, por suas práticas e valorização da carreira, fomentaram meu desejo de continuar estudando.

Também agradeço ao Prof. Me. Ricardo Luís de Souza, ao Prof. Me. Paulo Cezar Pagnossin e ao Prof. Dr. Davi Pires Dias pelo auxílio dado em fases relevantes da minha pesquisa.

Não deixaria de agradecer a muitos dos meus alunos, mas principalmente à turma do 6º ano de 2007, do Colégio AMA. Todos aqueles questionamentos sobre a aplicabilidade da Matemática, me fizeram buscar e pesquisar. Os quatro anos que passamos juntos foi de total aprendizado.

Agradeço aos meus amigos e familiares, que de longe ou perto expressaram sua confiança e apoio, dizendo-me que tudo valeria a pena.

Sou grata ao meu querido Anderson por estar junto comigo todo esse tempo e por sempre dizer que tudo daria certo. Me fez continuar, quando me senti enfraquecida.

Minha gratidão também à minha amiga Adriana Souza, que prontamente se dispôs a revisar esta dissertação. A agradeço também porque, provavelmente sem saber, foi uma das minhas referências ao almejar um curso de Mestrado como este.

Agradeço a todo corpo docente do curso e aos membros dessa Instituição, os quais sempre nos direcionaram e oportunizaram novas aprendizagens. Também sou grata aos meus colegas e amigos de classe que sempre se prontificaram a me ajudar.

Expresso meus agradecimentos ao meu estimado orientador Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca, o qual, literalmente, me abriu as portas para minha inserção no curso e na pesquisa. Obrigada pelos materiais, pelas orientações e por todo apoio dado. Em todos os nossos encontros sempre se mostrou prestativo, dedicado e paciente, fazendo-me enxergar além do que eu podia ver.

Finalizo, manifestando gratidão à Profa. Dra. Graziela Marchi Tiago e ao Prof. Dr. Carlos Bifi por suas preciosas contribuições e sugestões. A participação de ambos em minha banca foi fundamental para que toda essa etapa se concretizasse.

“Diga-me, e esquecerei, mostre-me, e lembrarei, envolva-me, e compreenderei”.

Provérbio chinês

RESUMO

Apresentamos aqui algumas reflexões envolvendo o ensino e a aprendizagem de noções de Cálculo Diferencial e Integral. Amparada em aportes teóricos pertinentes, busca-se propor atividades para abordar noções de Cálculo, como limites e derivadas, tomando como princípio norteador uma metodologia ativa, no caso, a Aprendizagem Baseada em Problemas (Problem Based Learning - PBL). Espera-se integrar conteúdos e conceitos matemáticos com as práticas profissionais de universitários, promovendo aprendizagens significativas. Por meio da inserção de problemas motivadores, reais ou realísticos, almeja-se amenizar certos entraves observados no ensino e na aprendizagem de Cálculo, bem como promover a construção de conhecimentos transdisciplinares.

Palavras-chaves: Cálculo Diferencial e Integral. Ensino e aprendizagem. Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL).

THE CALCULUS CONCEPTS OF EDUCATION AND INTEGRAL THROUGH THE PROBLEM-BASED LEARNING

ABSTRACT

This work presents some reflections involving teaching and learning Differential and Integral Calculus notions. Supported by relevant theoretical contributions, we seek to propose activities to address calculation notions as limits and derivatives, taking as a guiding principle an active methodology in the case, the Problem-Based Learning (Problem Based Learning - PBL). We expect to integrate mathematical content and concepts with professional college students practices, possibly promoting meaningful learning. By inserting motivator, real or realistic, problems we aim to alleviate certain obstacle observed in teaching and learning calculus, as well as promoting the construction of disciplinary knowledge.

Keywords: Differential and Integral Calculus. Teaching and learning. Problem-Based Learning (PBL).

LISTA DE QUADROS

	<u>Pág.</u>
Quadro 1 – Aspectos relacionados às metodologias de ensino.	70
Quadro 2 – Previsão do total de poluentes ao longo dos anos.....	89

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 1 – Aspectos processuais do PBL embasados em teorias de Vygotsky.	77
Figura 2 – Água mineral.	83
Figura 3 – Incêndios em tanques de combustível.	87
Figura 4 – Gráfico relacionado às previsões (poluentes x anos).	89
Figura 5 – Previsão da concentração de poluentes ao longo dos anos.	90
Figura 6 – Nível de concentração do Agente Oleoso no decorrer dos anos.	91
Figura 7 – Alimentos dentro de latas.	97
Figura 8 – Formato da lata.	98
Figura 9 – Discos cortados em quadrados.	99
Figura 10 – Discos cortados em hexágonos	99
Figura 11 – Esquema da chapa utilizada.	100
Figura 12 – Embalagens metálicas.	101
Figura 13 – Produção de laranjas.	105

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	23
1.1. Justificativa	26
1.2. Questões de pesquisa	28
1.3. Objetivos da pesquisa	29
1.4. Procedimentos, percursos metodológicos e referenciais teóricos	29
2 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE CÁLCULO NO ENSINO SUPERIOR	33
2.1. Contexto geral	33
2.2. O ensino de Cálculo	36
3 A APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS	43
3.1. O ambiente de aprendizagem	43
3.2. Conhecendo a metodologia de ensino adotada	45
3.3. Implantações do PBL ao longo da história	51
3.4. Articulação e delineamento do PBL	55
3.4.1. O problema	55
3.4.2. Os atores envolvidos	57
3.5. Relações entre Resolução de Problemas (RP), Modelagem Matemática (MM) e PBL	62
4 AS IDEIAS DE VYGOTSKY E O PBL	71
5 SUGESTÕES DE PROBLEMAS E ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS DE ACORDO COM O PBL	79
5.1. Problema 1 – Água mineral contaminada	83
5.2. Problema 2 – Impactos ambientais causados por poluentes químicos	87
5.3. Problema 3 – Projetando embalagens em forma cilíndrica	97
5.4. Problema 4 – Produção de citricultura	105
CONSIDERAÇÕES FINAIS	111
REFERÊNCIAS	117
APÊNDICE: PRODUTO FINAL	127

CAPÍTULO 1

1 INTRODUÇÃO

Perante as diversas transformações perceptíveis nos âmbitos sociais, políticos e econômicos e às novas demandas da sociedade contemporânea, exige-se novas alternativas quanto às metodologias de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos nos diversos níveis de ensino. Um dos intuitos é propiciar o desenvolvimento de mudanças realmente significativas, as quais aproximem os diversos campos de conhecimento, transcendendo formas de ensino convencionais, como simples reprodução de exercícios e atuação passiva dos estudantes, de modo que se favoreça a construção de conhecimentos transdisciplinares.

Diante disso, emergem inúmeras preocupações quanto às práticas educacionais e às formas como os conhecimentos adquiridos são construídos e consolidados. Faz-se necessário promover ambientes de aprendizagem que estejam voltados às exigências desse contexto atual; é primordial repensar algumas formas de propagação dos conhecimentos.

Bassanezi (2011), por exemplo, destaca que é preciso aliar a teoria com a prática, motivando o educando a procurar o entendimento da realidade que o cerca, bem como buscar meios para agir sobre ela e transformá-la.

Em todos os níveis educacionais é necessário rever muitos atributos ligados aos processos de ensino e aprendizagem. Particularmente, este trabalho de pesquisa volta-se ao campo da Educação Matemática do Ensino Superior. Diversas são as problemáticas encontradas nas investigações que envolvem o estudo de noções do Cálculo Diferencial e Integral. Nota-se, principalmente, que a aprendizagem dessa disciplina tem sido associada aos altos índices de reprovação e de evasão universitária (BARUFI, 1999; REIS, 2001; REZENDE, 2003; BASSANEZI, 2011). Por outro lado, alguns conteúdos envolvendo o campo matemático, muitas das vezes, têm sido interpretados como obsoletos e sem relação com aspectos da realidade, pois estão mais ligados ao uso de técnicas e reproduções mecanizadas.

Desejamos promover uma integração entre conhecimentos teóricos e práticos que, de fato, aproxime o mundo acadêmico com o profissional, conforme indicado por Ribeiro (2008b).

Propõe-se a elaboração de atividades que envolvam problemas reais ou realísticos, plausíveis de ocorrer na atuação prática de determinados profissionais, as quais tenham potencial de abordar simultaneamente conceitos, habilidades e atitudes, de modo que possam envolver tanto contextos curriculares quanto questões profissionais e sociais (FILHO; RIBEIRO, 2009).

Por isso, torna-se viável a adoção de uma metodologia de ensino que contemple o potencial descrito anteriormente, a qual seja produtiva e possibilite a construção de conhecimentos transdisciplinares. Nesse aspecto, contemplar-se-á nesta pesquisa a Aprendizagem Baseada em Problemas.

Essa metodologia de ensino se preocupa primordialmente com aspectos ligados às competências profissionais, e não apenas às competências baseadas no conteúdo ou conceitos de determinadas disciplinas de forma isolada (FILHO; RIBEIRO, 2009). Tal metodologia, reconhecida como Problem Based Learning (PBL), emerge como uma tendência pertinente às exigências impostas pela sociedade contemporânea. A mesma se pauta em abordagens problematizadoras com vistas à uma aprendizagem ativa e significativa, pois é contextualizada e próxima às realidades profissionais dos educandos.

Entendemos que a aprendizagem significativa é “uma incorporação de novos conhecimentos à estrutura cognitiva com significado, compreensão, capacidade de explicar, transferir, enfrentar situações novas” (MOREIRA, 2013, p. 12). E, as condições para que ela ocorra efetivamente, estão respaldadas na predisposição para aprender e na existência ou elaboração de materiais didáticos específicos, que favoreçam este tipo de aprendizagem.

Na presente pesquisa, o caráter dos problemas compilados (os quais assumirão o papel dos materiais didáticos) tem a intenção de instigar a curiosidade e o interesse dos universitários, fazendo com que os mesmos mobilizem seus conhecimentos em favor de suas próprias aprendizagens.

Busca-se aqui a articulação de alguns tópicos de Cálculo Diferencial e Integral, como Limites e Derivadas, com a proposta desta metodologia de ensino, o PBL. Para essa articulação, faz-se necessário selecionar uma rede de contribuições teóricas que permitam elaborar propostas de atividades que perpassem os ambientes do contexto universitário, visando uma perspectiva prática e transdisciplinar.

Mostraremos mais adiante que essa articulação pode ser viável à aprendizagem de alguns conceitos, e poderá ser uma forma de enfrentamento de alguns obstáculos envolvendo o ensino e a aprendizagem de noções do Cálculo em determinados cursos superiores. Ressaltamos que não encontramos no meio acadêmico, pesquisas ou materiais didáticos que explorassem essa metodologia no ensino e na aprendizagem de conceitos matemáticos.

A presente dissertação de mestrado está estruturada em cinco capítulos. No primeiro são apresentados aspectos gerais acerca da pesquisa. Apresentamos as justificativas, os objetivos, as questões de pesquisa, bem como os referenciais teóricos e procedimentos metodológicos.

No segundo capítulo realizamos algumas considerações a respeito do ensino e da aprendizagem de noções do Cálculo Diferencial e Integral. Consideramos aspectos relevantes ligados ao aprendizado de noções de Cálculo, com base em pesquisas desenvolvidas no âmbito da Educação Matemática.

No terceiro capítulo exploramos as principais ideias a respeito da metodologia de ensino adotada, a Aprendizagem Baseada em Problemas. Destacam-se vários aspectos, desde suas origens até suas relações com outras metodologias de ensino.

O quarto capítulo engloba articulações entre a Aprendizagem Baseada em Problemas e o ensino e aprendizagem de noções de Cálculo Diferencial e Integral, a partir de perspectivas do construtivismo. Usando como embasamento teórico as ideias de Levi S. Vygotsky, procura-se argumentar sobre possibilidades teóricas para abordar noções de Cálculo por meio de uma metodologia de ensino ativa, a qual vise promover conhecimentos além do contexto da sala de aula.

No quinto capítulo são apresentadas propostas de atividades e orientações didáticas que abordam noções de Cálculo Diferencial e Integral, por meio da Aprendizagem

Baseada em Problemas. Exploramos algumas sugestões de trabalho quanto às sessões de tutoria, as quais poderão nortear a dinâmica de aulas no formato do PBL. Além disso, também realizamos considerações a respeito das potencialidades das atividades e das dinâmicas das aulas, listando possíveis vantagens, desvantagens e obstáculos.

Por fim, apresentamos nossas considerações finais, as quais indicam à retomada dos principais objetivos deste trabalho, bem como respostas às questões de pesquisa e sugestões para futuras investigações envolvendo Matemática e o uso de uma metodologia de ensino ativa, no caso o PBL.

1.1. Justificativa

Assumimos como pressuposto que o ensino da Matemática precisa estar substancialmente articulado aos conhecimentos técnicos, científicos, sociais, políticos e/ou econômicos. Não basta apenas dar um enfoque maior às abstrações e formalizações de conceitos matemáticos. É imprescindível associá-los a aplicações práticas e também às realidades profissionais dos estudantes, a fim de diagnosticar, por meio de problemas reais ou realísticos, habilidades e competências elementares à sua formação.

Para tanto, acreditamos que conexões entre as diversas disciplinas devem ser propostas, assim como questões relevantes à sociedade atual, essas poderão motivar o aprendizado no âmbito universitário.

Abordar problemas em sala de aula é uma condição elementar para a compreensão e construção significativa dos conhecimentos. Isso porque,

O ensino baseado em problemas trabalha questões relevantes, atuais, para quais a sociedade, as empresas ou a vida real ainda não encontraram solução. Ao analisar mais profundamente essas questões, os alunos aprendem e utilizam disciplinas e teorias consideradas necessárias à resolução de determinado problema, isto é, os problemas definem as disciplinas e vice-versa. (ENEMARK; KJAERSDAM, 2009, p.24)

Esses autores ainda reiteram que é possível inovar na educação quando se toma consciência da necessidade em estabelecer uma dialética entre o ensino baseado em

disciplinas (no qual se prioriza alguma disciplina específica) e aquele baseado em problemas.

As disciplinas e suas teorias correspondentes são imprescindíveis para uma sólida base acadêmica e profissional. Por outro lado, o projeto baseado em problemas é essencial para se compreender a interdisciplinaridade dos problemas da empresa, da sociedade e da vida real e possibilitar aos graduados universitários lidar com problemas ainda não conhecidos no futuro. O objetivo é um estudo amplo e uma compreensão das conexões existentes entre os diferentes campos e habilidades para, assim, poder atuar em uma sociedade cada vez mais complexa e em constante mudança. (ENEMARK; KJAERSDAM, 2009, p. 24)

Por meio da adoção de uma aprendizagem envolvida por situações instigantes é possível atrelar aspectos teóricos e práticos de um modo interdisciplinar.

A partir da inserção de problemas motivadores, dos conhecimentos prévios dos alunos e do compartilhamento de ideias (por meio da formação de grupos facilitados por tutores) provavelmente pode-se amenizar alguns problemas enfrentados no ensino atual. Esses são pontos fundamentais ligados à proposta de ensino da Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL). Esse termo PBL, cunhado pela Universidade McMaster:

Não equivale a uma aprendizagem por resolução de problemas, uma vez que o aluno, quando inicia a sua formação, não tem uma base de conhecimentos ou habilidades para resolver um problema cuja intenção é imitar o que encontrará em sua realidade profissional. Naturalmente, à medida que for avançando no programa terá de intervir e, eventualmente, resolver problemas. (BRANDA, 2009, p. 225)

Essa proposta metodológica não se resume a apresentação de um problema em si e a simples busca por sua resolução. A mesma exige muito mais dos estudantes, por exemplo, mobilizações de conhecimentos, valores e atitudes, a promoção de discussões em grupo, o desenvolvimento da autonomia, a busca por estratégias de resolução de um problema, a realização de pesquisas sobre um determinado tema, a viabilização de estudo autodirigido, dentre outros aspectos.

Mediante o ponto de vista utilitário, o PBL pode contribuir significativamente para o dilema associado ao currículo lotado (SMITH, 2002), o qual está respaldado em conteúdos específicos de determinadas áreas, inclusive no campo da Matemática. Se

houver um programa PBL bem projetado, os alunos podem ser desafiados a apreciar e a adotar novos conhecimentos, de acordo com suas prováveis aplicações.

Desta forma, surge o interesse em abordar conceitos ligados às noções de Cálculo Diferencial e Integral, por meio do PBL. Buscamos investigar se estudos sobre Limites e Derivadas podem ser explorados em uma perspectiva diferenciada, neste caso, por meio do PBL.

Por meio do PBL espera-se estimular a valorização do processo de ensino e aprendizagem das noções de Cálculo, bem como oportunizar aos estudantes o desenvolvimento de competências e habilidades essenciais à sua formação e a atuação profissional. Em capítulos posteriores, abordaremos alguns aspectos associados a esse tópico.

1.2. Questões de pesquisa

A problemática que norteia a pesquisa envolve a busca de encaminhamentos ou respostas para a seguinte questão:

Quais são as potencialidades teóricas do uso de uma metodologia ativa, no caso a Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL), no ensino e aprendizagem de noções do Cálculo Diferencial e Integral, possibilitando uma abordagem transdisciplinar e a resolução de problemas reais ou realísticos?

Outras questões adjacentes:

- Quais seriam as características ou aspectos (vantagens, desvantagens, entraves, obstáculos, entre outros) envolvidos na elaboração de um problema, de acordo com os preceitos da Aprendizagem Baseada em Problemas, envolvendo tópicos de Cálculo Diferencial e Integral?
- Do ponto de vista teórico, o uso da Aprendizagem Baseada em Problemas no processo de ensino e aprendizagem de noções do Cálculo Diferencial e Integral pode favorecer o desenvolvimento de competências relacionadas à prática profissional de estudantes universitários?
- Quais seriam os possíveis obstáculos em relação ao uso do PBL para abordar os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral?

1.3. Objetivos da pesquisa

São objetivos gerais dessa pesquisa, explorar do ponto de vista teórico, quais são as potencialidades (possíveis vantagens, desvantagens ou entraves) no uso de uma metodologia ativa, no caso o PBL, no ensino e na aprendizagem de noções de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), sob uma perspectiva transdisciplinar.

Entre os objetivos específicos, busca-se, elaborar e organizar atividades que permitam explorar noções de CDI por meio do PBL; desenvolver competências e habilidades relacionadas às práticas profissionais por meio dessa metodologia; investigar quais são os possíveis obstáculos em relação ao PBL no tocante às abordagens de noções de Cálculo Diferencial e Integral e incentivar o desenvolvimento de pesquisas que envolvam o ensino e aprendizagem de noções de CDI por meio de metodologias de ensino ativas.

1.4. Procedimentos, percursos metodológicos e referenciais teóricos

Segundo Lima e Miotto (2007), um dos primeiros passos para se definir o percurso metodológico em uma pesquisa é expor o método a ser adotado. Isso permitirá tanto a apresentação do caminho do pensamento quanto o da prática exercida na apreensão da realidade, além de demonstrar visões de mundo veiculadas pela teoria da qual o pesquisador se vale.

Nossa proposta de trabalho se pauta em uma abordagem qualitativa, a qual está contemplada sob a perspectiva de uma pesquisa teórica, isso no sentido de analisar as principais contribuições teóricas em relação ao ensino e aprendizagem de noções de Cálculo por meio da Aprendizagem Baseada em Problemas e, conseqüentemente, como produto da pesquisa, a elaboração de sugestões de atividades que complementam o trabalho.

A pesquisa teórica não implica imediata intervenção na realidade, mas nem por isso é menos importante. Seu papel é decisivo para construção de intervenção precisamente o investimento competente. A pesquisa teórica perfaz uma condição fundamental desta competência e determina, por isso, a qualidade da intervenção. (DEMO, 1997, p.36)

Fiorentini (2007, p. 69) destaca que “o pesquisador, nesse tipo de estudo, não utiliza dados e fatos empíricos para validar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica”.

Para que tal perspectiva seja contemplada será elementar explorar os campos de conhecimento envolvendo CDI e o PBL. Nesse caso, a pesquisa bibliográfica, é uma das estratégias mais viáveis.

A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir do material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho desta natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. (GIL, 2008, p. 50)

Ainda de acordo com esse autor, esse tipo de pesquisa apresenta a vantagem de investigar uma ampla gama de fenômenos e informações em comparação àquela que se poderia pesquisar diretamente. Nos casos relativos aos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo e às considerações sobre o PBL, torna-se possível averiguar sob uma amplitude maior os espaços nos quais esses estudos têm sido desenvolvidos. Essas considerações tem o intuito de promover a familiaridade com as questões apresentadas, permitindo que novos direcionamentos e reflexões sejam apresentados.

Severino (2007) também esclarece que a pesquisa bibliográfica é a que se respalda a partir do registro disponível sobre o tema escolhido, decorrente de pesquisas anteriores, sob a forma de documentos impressos, como livros, teses, dissertações e artigos científicos.

Para o desenvolvimento do estudo aqui proposto, considerando os objetivos e questões de pesquisa indicados, primeiro realizamos levantamentos bibliográficos acerca de CDI e do PBL. Em seguida, houve a realização das etapas da análise explicativa das soluções (construindo uma visão crítica enquanto pesquisadores para explicar ou justificar informações selecionadas) e uma síntese integradora (a qual procurou conectar os materiais selecionados, com anotações, reflexões, proposição de ideias e argumentos).

De acordo com a temática aqui proposta, iniciaram-se pesquisas ligadas a metodologias de aprendizagem ativas. O PBL já se destacava como uma metodologia

de interesse, por apresentar características propícias à aprendizagem e à atuação profissional. De início, obteve-se um número reduzido de bibliografias no cenário brasileiro, embora seu campo de aplicação tenha aumentado significativamente no país. Muitos dos materiais encontrados referenciavam publicações internacionais. Logo, fez-se necessário uma busca mais criteriosa sobre as origens e experiências com o PBL.

Após as etapas da seleção dos materiais, a leitura e estudo dos mesmos foram momentos imprescindíveis para as próximas fases. Destaca-se que na:

Pesquisa bibliográfica, a leitura apresenta-se como a principal técnica, pois é através dela que se pode identificar as informações e os dados contidos no material selecionado, bem como verificar as relações existentes entre eles de modo a analisar a sua consistência. (LIMA; MIOTO, 2007, p. 41)

Tanto em relação às investigações dos processos de ensino e aprendizagem na área de Cálculo quanto ao PBL, o foco das leituras se restringiu a selecionar fontes mais próximas o possível dos nossos problemas de pesquisa.

Em relação ao PBL foram estudadas dissertações e teses que pontuaram desde as origens da metodologia até suas aplicações (do ensino de medicina até às engenharias). Referências nacionais a respeito do que é essa metodologia e suas aplicações em alguns cursos universitários foram utilizadas a fim de compreender o embasamento teórico e seus principais pressupostos. A partir daí, bases internacionais começaram a ser encontradas em revistas voltadas à Educação Médica, com a produção de artigos elaborados por pesquisadores nessa área, assim como o levantamento de análises sobre universidades que adotaram o PBL, ou parte dele, em sua estrutura curricular.

Dois livros nacionais embasaram as pesquisas iniciais. Ambos são voltados às experiências com a Aprendizagem Baseada em Problemas no ensino superior. Os autores são os pesquisadores, Luis Roberto de Camargo Ribeiro, da Universidade Federal de São Carlos, e Ulisses Ferreira de Araújo, da Universidade de São Paulo. Este último realizou a publicação do livro em parceria com Genoveva Sastre, da Universidade de Barcelona, e outros autores, os quais descrevem diversas experiências do PBL ao longo dos anos.

Uma ampla gama de artigos também foi analisada, referências de Universidades como a Maastricht (na Holanda), a McMaster (no Canadá), a Aalborg (na Dinamarca), dentre outras, serviram de fundamentações para a pesquisa. Dentre os autores considerados, destacam-se: Henk G. Schmidt e Cindy Hmelo-Silver.

Busca-se aqui articular investigações a respeito do PBL com problemáticas associadas ao ensino e aprendizagem de noções do Cálculo Diferencial e Integral, e principalmente, elaborar propostas de atividades sob esse viés.

No próximo capítulo, teceremos considerações a respeito de algumas pesquisas que envolvem o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior, buscando explorar os principais fenômenos envolvidos nesse contexto.

CAPÍTULO 2

2 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE CÁLCULO NO ENSINO SUPERIOR

2.1. Contexto geral

Na sociedade contemporânea, percebem-se as rápidas e diversas transformações que ocorrem, em especial, relacionadas às tecnologias. Seja no âmbito político, econômico, social, cultural, faz-se necessário que a educação contribua significativamente para o desenvolvimento de competências e habilidades dos estudantes, nos mais variados níveis de ensino, buscando atender as novas demandas impostas pela sociedade, e propiciando a formação de cidadãos críticos e participativos.

Particularmente, almeja-se uma contribuição voltada ao Ensino Superior. Isso porque nas próprias recomendações da Lei de Diretrizes e Bases do Ensino Superior, podemos destacar pontos essenciais, como:

Formar diplomados nas diferentes áreas de conhecimento, aptos para a inserção em setores profissionais e para a participação no desenvolvimento da sociedade brasileira, e colaborar na sua formação contínua; estimular o conhecimento dos problemas do mundo presente, em particular os nacionais e regionais [...]. (BRASIL, 1996, p. 17)

Desta forma, o ensino da Matemática no contexto universitário também tem por finalidade colaborar com a formação pessoal e profissional dos estudantes, nos diversos cursos superiores.

O intuito dos conhecimentos matemáticos é “construir uma visão global dos conteúdos de maneira teoricamente significativa para o aluno” (BRASIL, 2001, p. 15). E, mais, a abrangência desta disciplina, segundo tais diretrizes, por meio de seus currículos, visa promover habilidades e competências, como o estabelecimento de relações entre Matemática e outras áreas de conhecimento; o incentivo a conhecimentos que abordem questões contemporâneas; possibilitar uma educação abrangente necessária ao entendimento do impacto de determinadas soluções, em um contexto global e social.

Tais perspectivas denotam a relevância da Matemática no campo universitário. Percebe-se, ao longo dos anos, que problemáticas envolvendo os processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, têm sido discutidas, tanto por parte de professores como por pesquisadores. Os objetivos ressaltados no parágrafo anterior não são plenamente alcançados. Diante disso, observa-se o quão necessário se faz que investigações relacionadas a essa área se intensifiquem.

Nasser (2004) pontua que as pesquisas no Ensino Superior têm crescido no meio acadêmico, destacando-se, dentre vários interesses de estudos, às dificuldades inerentes à Matemática Superior e ao grande aumento de pesquisadores na área de Educação Matemática.

As pesquisas relativas ao processo ensino-aprendizagem no nível superior tomaram maior fôlego, na área da Educação Matemática, nas décadas de 80 e 90. Os pesquisadores puderam de pronto, usufruir dos conhecimentos acumulados sobre esse processo nos níveis básicos de ensino, mas era fundamental buscar compreender as especificidades desse nível de ensino, quando estão em jogo a formação do pensamento avançado, outra faixa etária e a especialização dos cursos. (IGLIORI, 2007, p. 2)

Esse campo de conhecimento tornou-se reconhecido tanto nacional quanto internacionalmente.

Eventos acadêmicos e conferências foram criados em prol da propagação e discussão de conhecimentos matemáticos, conforme pontuam Almeida e Iglori, (2013), Frota, (2006), Nasser, (2004), Silva, (2011). É pertinente citar: o *Advanced Mathematical Thinking Group*, formado na década de 80, por meio do evento conhecido como *International Group for the Psychology of the Mathematics Education* (PME). Houve também a criação da *Conferência Interamericana de Educação Matemática* (CIAEM), que é uma organização afiliada à *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), a qual teve como um de seus presidentes o renomado educador matemático Ubiratan D'Ambrósio (1979-1987).

Outro encontro que se destaca no meio internacional é o *International Conference on the Teaching of Mathematics (at undergraduate level)* – ICTM. Tais exemplos retratam o início das preocupações no campo universitário.

Em âmbito nacional, podemos mencionar o *Encontro Nacional de Educação Matemática* (ENEM) e o *Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (SIPEM), promovidos pela Sociedade Brasileira de Matemática, dentre outros grupos de pesquisas, como o *Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática* (EBRAPEM), por exemplo.

Relevante ressaltar que há eventos como o *Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia* (COBENGE) que também denotam muitas pesquisas envolvendo conhecimentos de Matemática Superior. Tal fato se justifica devido às grandes relações entre essa área de estudos e o baixo desempenho apresentado em tópicos envolvendo, dentre outros conteúdos, o Cálculo Diferencial e Integral, situações essas que preocupam a formação profissional dos futuros engenheiros.

Mediante essas considerações é preciso analisar os ambientes de ensino e aprendizagem associados à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral nos mais diferentes cursos, a fim de promover aprendizagens significativas e mais próximas às realidades dos estudantes. Em outras palavras, se faz necessário promover aprendizagens ampliando e reorganizando ideias já existentes na estrutura mental, criando a capacidade de relacionar e construir novos conhecimentos.

Almeida e Iglioni (2013) destacam que tal disciplina é particularmente importante, porque trabalha com noções fundamentais para a Matemática Avançada. E também observam suas associações com os altos índices de reprovações no âmbito universitário.

Barufi (1999, p. 3) retrata em suas pesquisas a importância dessa disciplina no Ensino Superior, “o Cálculo é uma ferramenta extremamente útil, pois a variação de grandezas e a necessidade de aproximações locais é uma problemática presente em praticamente todas as áreas do conhecimento”. No entanto, tal afirmação provoca um contraponto sob a perspectiva do cenário atual, pois, segundo a pesquisadora, em análises de resultados verificados em suas investigações, a compreensão é de que o nível de aproveitamento dos estudantes é algo muito preocupante. Iglioni destaca que:

O tratamento específico contribui com um entendimento melhor das dificuldades dos estudantes universitários apresentados com maior ou menor intensidade nas diversas disciplinas. O Cálculo [...] está entre

as disciplinas que apresentam alto índice de fracasso. (IGLIORI, 2007, p. 2)

Dessa forma, propõe-se uma análise mais pontual em relação a esse campo de conhecimento.

2.2. O ensino de Cálculo

Um significativo número de análises e investigações no meio acadêmico retratam as preocupações acerca da Educação Matemática de um modo geral. E no contexto universitário isso também é perceptível.

Particularmente, os processos de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral se destacam como uma das temáticas abordadas em pesquisas atuais.

Notamos que:

A preocupação com o ensino de Cálculo vem se mostrando constante; em quase todos os eventos relacionados com o ensino de Matemática ou Engenharia temos encontrado trabalhos relacionados com as dificuldades demonstradas pelos alunos dessa disciplina, as vezes com sugestões de atividades para tentar modificar a situação. (CURY; BISOGNIN, 2006, p. 17)

Muitos estudantes universitários, nos mais diferentes cursos, consideram o Cálculo algo bem abstrato. Por vezes, desde o início de seus estudos, alguns se deparam com grandes dificuldades, o que pode gerar diversos obstáculos durante a aprendizagem do mesmo.

O Cálculo representa a primeira vez em que o aluno é confrontado com o conceito de *limite*, envolvendo cálculos que não são mais executados por aritmética simples e álgebra, e infinitos processos que só podem ser realizados por argumentos indiretos. Os professores muitas vezes tentam contornar os problemas, usando uma abordagem "informal" jogando para baixo os aspectos técnicos. No entanto, independentemente do método utilizado, uma insatisfação em geral com o Curso de Cálculo surgiu em vários países ao redor do mundo na última década. (TALL, 1992, p.18)

Essa explanação indica que problemáticas atuais envolvendo essa área não se restringem apenas ao contexto de ensino nacional.

Considera-se que:

David Tall é (desde 1970) um dos principais articuladores da área de pesquisa "pensamento matemático avançado". As questões dessa

área giram em torno das dificuldades encontradas na aprendizagem dos conceitos de algumas disciplinas do Ensino Superior, como Cálculo Diferencial e Integral, Análise e Álgebra Linear. (ALMEIDA; IGLIORI, 2012, p. 149)

Ou seja, essas considerações demonstram o quanto preocupações em relação a esse campo de conhecimento foram sendo evidenciadas ao longo das décadas.

Sendo assim, consideramos que o ensino de Cálculo precisa ser ressignificado a fim de amenizar algumas problemáticas quanto aos processos de ensino e aprendizagem. Afinal, segundo Rezende (2003, p. 44), “o Cálculo é uma grande rede que interage com várias outras redes: o próprio conhecimento matemático; a Física e as Ciências Naturais de um modo geral; as Ciências Sociais e Econômicas; o desenvolvimento de novas tecnologias”. E são essas características que precisam estar atrelados ao contexto da sala de aula.

Observamos que se não há uma clarificação real quanto aos propósitos dos estudos desse Cálculo Diferencial e Integral, ele passa, então, a ser visto como algo desconectado da realidade.

Por isso, almejamos que o mesmo seja vislumbrado com perspectivas diferenciadas, vinculadas a diferentes realidades profissionais, pois:

Com efeito: o Cálculo é imprescindível para a formação do cidadão. Resolução de problemas de juros ou de crescimento de população (ou do aumento do custo de vida, da dívida externa, etc.), cálculos de velocidades ou de taxas de variações de outras grandezas, interpretação de gráficos de funções reais, resolução de problemas de otimização (de áreas, de orçamentários domésticos etc.) são habilidades cada vez mais requisitadas para o exercício pleno da cidadania em uma sociedade de crescente complexidade. (REZENDE, 2003, p. 37)

Isso porque se essa disciplina for vista como algo isolado, sem relação com outras áreas de conhecimento, e se a mesma for fonte de temor para os estudantes, então o ensino de Cálculo não estará contemplando suas reais expectativas.

Logo, acreditamos que seja necessário ressignificar saberes a respeito do ensino e aprendizagem do Cálculo, por intermédio de ambientes de aprendizagem ativos e diferenciados. Nesse sentido, Barufi (1999) destaca que o mais relevante, não deve ser apenas as preocupações voltadas aos enfoques dados quanto aos conteúdos e

conceitos matemáticos, mas, sim, como os significados são construídos pelos estudantes.

Segundo Cury (2000, p. 2), é válido observar que em relação à Matemática Superior:

O ensino das disciplinas básicas, especialmente Cálculo Diferencial e Integral, não está ainda atendendo essas exigências, pois está muito calcado nas explicações do professor, nos exercícios padronizados, na preocupação com o cumprimento de cronogramas. Para que o aluno aproveite ao máximo as ferramentas que o Cálculo lhe disponibiliza, é necessário que ele tenha uma compreensão do significado dos conceitos estudados e tenha despertada sua curiosidade para as possibilidades de utilização dos mesmos. (CURY, 2000, p. 2)

Dessa forma, defendemos o uso de uma metodologia de ensino ativo, no caso, o PBL, para propiciar a compreensão de que o Cálculo realmente é uma ferramenta útil em diferentes áreas do conhecimento e campos de atuação profissional. Consideramos que o desenvolvimento de propostas de trabalho norteado por essa metodologia pode despertar o interesse dos estudantes e também valorizar o ensino dessa área.

Como observamos anteriormente, as práticas de ensino envolvendo o Cálculo têm sido contempladas por vários pesquisadores. Tall (1992), por exemplo, pontua que análises realizadas na França, no Reino Unido e nos Estados Unidos em relação às práticas educacionais voltadas ao Cálculo, detectaram vários tópicos desfavoráveis a essa área, como a existência de falhas em abordagens formais no ensino; a necessidade de dar mais significado aos assuntos abordados; a buscas por possíveis reorganizações de conteúdos, dentre outras. Esse pesquisador denota que havia uma insatisfação geral e, este fato, levou ao movimento conhecido como *Calculus Reform*, por volta da década de 80, nos Estados Unidos. Tal consideração indica o quanto pesquisas nessa área de conhecimento precisavam ser ampliadas.

Estudos atuais retratam várias problemáticas associadas ao ensino e aprendizagem de Cálculo. Rezende (2003) preocupa-se com as origens dos diferentes problemas envolvendo o ensino de Cálculo e quais as fundamentações relacionadas ao sucesso e fracasso desse campo de estudos no ensino superior.

Esse autor aborda aspectos comparativos sobre os índices de não aprovação em cursos que oferecem a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e retrata a busca por soluções que algumas instituições de ensino passaram a adotar em prol de

melhorias, fatores estes que denotam a gravidade da situação. De acordo com esse pesquisador “excluir o Cálculo de sua grade curricular ou criar disciplinas subsidiárias para o seu ensino representam, sem dúvida, indícios de que o problema já atinge limites próximos do insuportável” (REZENDE, 2003, p. 3).

Na mesma obra, são evidenciados aspectos epistemológicos que buscam compreender a “crise” existente no ensino de Cálculo, chegando ao ponto de ser interpretado como uma catástrofe. Desse modo, parte-se do pressuposto de que a compreensão da “catástrofe” pode possibilitar a busca por soluções, o que poderá romper ou amenizar certas barreiras encontradas no ensino atual dessa disciplina.

Abreu e Reis (2011) em discussões associadas a alguns tópicos de definições formais de Cálculo esclarecem que as mesmas normalmente estão pautadas em abordagens livrescas e centradas no professor. Fatores estes que podem conduzir a uma aprendizagem baseada na transmissão de conhecimentos, fazendo com que a memorização e a reprodução se sobressaiam.

Há também algumas críticas em relação às abordagens atuais no ensino de Cálculo:

Ocorre um excesso de rigor na apresentação de tópicos como limites, derivadas e integrais e não se verifica uma preocupação com suas aplicações, que, caso fossem melhor tratadas, exploradas, poderiam gerar novas compreensões sobre as ideias e os conceitos fundamentais do Cálculo. (REIS, 2001, p. 43)

E, mais, esse autor aborda reflexões quanto a prática pedagógica e também esclarece que o professor precisa compreender o papel do Cálculo na formação dos alunos, isso pode intervir e melhor direcionar o processo de ensino e aprendizagem.

Esse aspecto reitera a defesa de que “a introdução precoce das linguagens verdadeiramente utilizadas, com os termos que são aplicados na vida profissional, economiza muito tempo no futuro, e ajuda a fazer a ligação entre as disciplinas” (SOARES DE MELLO, J.; SOARES DE MELLO M., 2003, p. 127). Ou seja, tais perspectivas de integração entre teoria e prática possivelmente podem favorecer as bases fundamentais do ensino e aprendizagem do Cálculo.

Observa-se que cursos de nivelamento passaram a ser oferecidos em diversas instituições de ensino. A inserção da “Matemática Básica”, do “Pré-Cálculo”, do

“Cálculo Zero”, ou outros nomes afins, remetem à interpretação de que ainda existem muitos obstáculos a serem superados, segundo considerações de Rezende (2003) e Reis (2001).

É nítido perceber que essa busca por respostas retrata-nos os mais diferentes contextos, tanto os das práticas pedagógicas quanto os das pesquisas.

O interesse em relacionar aprendizagens significativas, o papel do professor e o ensino e a aprendizagem de Cálculo também foram abordados por Barufi (1999), reiterando que múltiplas interações podem ser realizadas sob o ponto de vista amplo e integrador dessa área, embora seja permeada por tanta abstração e formalização.

Se a natureza das problemáticas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral engloba diversos aspectos, como obstáculos emergentes das próprias dificuldades no ensino da Matemática; origens de natureza epistemológica; questões ligadas às práticas educacionais; dentre outras; então é primordial realizar investigações acerca desses assuntos e indicar alguns caminhos que ao menos amenizem tal situação. Afinal,

Atualmente, o ensino da Matemática parece estar dividido entre conceituação, manipulação e aplicação. Na conceituação, o professor apresenta as definições, os Axiomas, os Teoremas e os seus Corolários (consequências) por meio de fórmulas. A seguir, manipula tais conceitos nos exercícios e, posteriormente, aplica o conhecimento teórico em algumas situações concretas. (VIEIRA, 2013, p. 28)

Mediante a apresentação da citação anterior, observa-se que há muito a se considerar a respeito do atual ensino de tópicos de Cálculo Diferencial e Integral. As formas convencionais de contemplar essa disciplina retratam o quão necessário é a exploração de novas estratégias de ensino, buscando proximidades entre o meio acadêmico e às necessidades reais dos discentes.

Silva (2011) descreve que há diferentes dimensões do ensino e aprendizagem de Cálculo, do ponto de vista das dificuldades de conceitos até expectativas dos principais atores envolvidos no processo.

Entendemos que entre os objetivos para o ensino de Matemática encontram-se o encorajamento dos alunos na tomada de decisões; possibilitar que novas descobertas sejam realizadas; que compreendam a área como uma ciência, algo além de mera reprodução de exercícios; estabelecer conexões entre o que se aprende e o que se

pode vislumbrar numa futura atuação profissional. Isto é, faz-se necessário compreender os “componentes do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo: saber, aluno e professor” (SILVA, 2011, p. 402).

Nasser (2004, p. 2) observa que “uma preocupação comum a todas as pesquisas é a de que os resultados cheguem à sala de aula, ou seja, de que causem interferência real no processo de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Superior”.

Acreditamos que todo esse processo de inserção dos estudantes no meio universitário também é algo que precisa ser considerado. “Em primeiro lugar, parece-nos que a transição para o Ensino Superior está trazendo dificuldades para alunos e professores, pois muitos apresentam lacunas em termos de conhecimentos e pré-requisitos” (CURY; CASSOL, 2004, p. 33).

Em suas experiências práticas, em relação ao ensino de Cálculo (limites, derivadas, integrais), essa pesquisadora destaca que em geral há falta de conhecimentos em Matemática Básica, e que as habilidades de resolução de problemas e capacidade de argumentação não são notoriamente atingidas como se esperava, mesmo com a adoção de vários recursos e metodologias. “Além disso, muitos estudantes, ainda que recebam comentários sobre suas resoluções, não conseguem entender os próprios erros; parece-nos, então, que lhes falta uma reflexão sobre sua própria prática” (CURY; CASSOL, 2004, p. 33).

Interessante perceber que em geral as práticas educacionais utilizadas no ensino de Cálculo ocorrem por meio de metodologias pautadas na transmissão e reprodução de conhecimentos. Embora estejam amplamente associadas às realidades técnicas e científicas, na maioria dos casos, as noções de CDI são abordadas como algo muito específico e de modo fragmentado, sem relação com possíveis aplicações profissionais reais ou fictícias, buscamos indicar que este fato pode ser modificado a partir de determinadas perspectivas metodológicas.

Segundo Vieira (2013, p. 28), “as experiências metodológicas não devem ser ditadas por modismos, mas precisam estar ancoradas em estudos didático-pedagógicos que as justifiquem”.

Julgamos que a relevância da nossa pesquisa se respalda justamente nesse ponto, promover aprendizagens significativas de alguns tópicos de Cálculo, sob uma perspectiva de ensino que vise à promoção de aspectos transdisciplinares e a prática profissional. Almeja-se articular conceitos e conteúdos do Cálculo a conhecimentos de diferentes áreas e a questões ligadas às possíveis atuações profissionais dos estudantes.

Essa defesa se embasa no fato de que:

Ensinar Cálculo envolvendo aplicações a outras disciplinas vem se tornando assunto da mais alta importância e foi objeto de conferências proferidas pelos professores Howson, D'Ambrósio, Pollak, Vanlent, no 3º Congresso Internacional de Educação Matemática. (SILVA, 1979, p. 6)

Ou seja, há décadas atrás estas preocupações já eram inerentes à Matemática do Ensino Superior. E, com base na adoção de situações contextualizadas e motivadoras, o que pode ser promovida pelo ambiente da Aprendizagem Baseada em Problemas, espera-se motivar novas posturas por partes dos estudantes, e ressignificações quanto a algumas noções de CDI. Acreditamos que,

Fazendo um pouco mais de esforço e na medida das possibilidades, introduzir no curso de Cálculo Diferencial e Integral aplicações e exemplos relacionados com a carreira que abraçará ao concluir a graduação, o aluno verá, o quanto é útil esta disciplina como parte integrante do seu currículo. (SILVA, 1979, p. 11)

Com as considerações que fizemos neste capítulo, buscamos apresentar um breve panorama a respeito do ensino e aprendizagem de Cálculo, indicando alguns dos desafios envolvidos nesse processo, justificando também nossa opção por uma metodologia de ensino ativa, a Aprendizagem Baseada em Problemas. O próximo capítulo será dedicado a uma apresentação mais cuidadosa dessa metodologia.

CAPÍTULO 3

3 A APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS

3.1. O ambiente de aprendizagem

O ambiente de aprendizagem PBL envolve situações de aprendizagens interativas e contextualizadas. Esclarecemos aqui que quando nos referirmos ao termo situação problema estamos pensando no contexto geral envolvendo a dinâmica do PBL, ou seja, analisamos o processo como um todo. De acordo com Perrenoud *et al* (2002, p. 114) situação problema:

São fragmentos relacionados com nosso trabalho, nossa interação com as pessoas, nossa realização de tarefas, nosso enfrentamento de conflitos. Referem-se, pois, a recortes de algo sempre aberto, dinâmico e, como tal, repetem aquilo que é universal no problemático e fantástico que é a vida [...]. (PERRENOUD *et al.*, 2002, p. 114)

Dessa forma, nossa referência a uma situação problema, considera não apenas o problema adotado, mas engloba todos os compartilhamentos de informações e conhecimentos entre os indivíduos envolvidos, diz respeito aos planos de ação a serem definidos pelos alunos, contempla as hipóteses levantadas, as provocações de desequilíbrios cognitivos, etc.

Para que tenha uma dinâmica de sucesso, toda situação problema, precisa ser vivenciada. E em nossas sugestões de atividades, espera-se que os universitários envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, sejam desafiados e possam, com o auxílio do tutor, superar seus obstáculos.

Perrenoud *et al* (2002) observam que toda situação problema deve ser organizada em torno da resolução de um obstáculo. Neste trabalho de pesquisa, conforme a dinâmica de aulas do PBL, esse obstáculo será o problema apresentado aos estudantes.

Ainda em consonância com esses autores, esse problema, embora inicialmente proposto pelo professor (que nessa metodologia adota a postura de tutor), deve tornar-se “questão dos alunos”. E, mais, segundo os mesmos, essas propostas de atividades precisam operar em uma zona próxima às expectativas dos alunos, de modo que se propicie sua resolução e uma real interiorização das “regras do jogo”. Entendemos que isso se aplica às nossas considerações para um problema no

formato do PBL, tanto em relação às exigências da tarefa em si quanto à compreensão da dinâmica das aulas e de seus propósitos.

O problema – o que se pretende?

Diante dessa proposta de vínculos entre CDI e o PBL pretende-se mobilizar competências e habilidades que envolvem diferentes áreas do conhecimento. Compreendemos que:

Competência é a capacidade que as pessoas desenvolvem de articular, relacionar os diferentes saberes, conhecimentos, atitudes e valores, construídos por intermédio de sua vivência e por meio dos conhecimentos construídos na escola [...]. A competência implica, portanto, em operacionalizar conhecimentos, atitudes e valores. É uma ação cognitiva, afetiva e social que se torna visível em práticas e ações que se exercem sobre o conhecimento, sobre o outro e sobre a realidade. (CRUZ, 2010, p. 29)

E é por meio do desenvolvimento dessa competência que há uma mobilização de recursos cognitivos, os quais, em conjunto, permitem que diferentes situações ligadas a contextos sociais, culturais e profissionais sejam resolvidas de forma eficaz e coerente. Trabalhar com um ambiente de aprendizagem com características do PBL, mesmo no campo matemático, permite uma dimensão relacional muito maior, a qual contribui para a compreensão de competência.

O ser humano toma decisões, formula julgamentos, compromete-se com uma resposta. Tomar decisão é mais do que resolver um problema, pois implica mobilizar valores, estabelecer raciocínios, enfrentar dilemas e decidir pelo que julga melhor, mais justo, mais condizente para o sujeito e para a sociedade à qual pertence. (PERRENOUD et al., 2002, p. 127)

Nesta dissertação é o que desejamos propiciar – contribuir com situações de ensino e aprendizagem nas quais competências (pertinentes a conceitos, atitudes e procedimentos) possam se desenvolver, e sejam benéficas tanto para o sujeito que aprende quanto para a sociedade na qual o mesmo atua.

Com nossas sugestões de atividades, pretende-se fomentar o respeito aos demais integrantes da equipe (assim como nas atuações profissionais); o espírito investigativo, de pesquisa e questionamento; a organização de trabalho autônomo; a capacidade de observar, analisar, sintetizar e abstrair o objeto de estudo; o domínio de conceitos essenciais à sua formação, dentre outras (CRUZ, 2010).

Importante considerar que quando nos reportamos à mobilização dessas capacidades, desses saberes, falamos do desenvolvimento do saber-fazer, ou seja, das habilidades esperadas.

As habilidades, ou os saber-fazer, são os componentes da competência explicitáveis na ação [...] é um híbrido de recurso e resultado [...]. Quando as capacidades são colocadas a serviço da ação, competências são desenvolvidas e se tornam aprendizados interiorizados pelos sujeitos. Ao mesmo tempo essas habilidades são mobilizadas pelas capacidades junto com os saberes e o saber ser para se constituírem novas competências. (CRUZ, 2010, p. 49)

Nosso propósito é inserir propostas que articulem diversas habilidades, que buscam à competência. Por isso, o direcionamento deste trabalho está voltado ao docente, pois tendo consciência de suas intenções faz-se necessário um conhecimento maior acerca da metodologia de ensino ativa, no nosso caso, do PBL, e de orientações que possam nortear efetivamente sua prática na sala de aula.

Nesta pesquisa indicamos encadeamentos entre sujeito e objeto (estudante e noções de CDI) por meio do PBL, viabilizando que a compreensão da realidade possa ascender a outro nível, adotando um significado mais abrangente aberto a novos horizontes, novos processos, os quais descrevem seu caráter transdisciplinar (SANTOS, 2008).

Oportunizar um conhecimento com essa característica,

Associa-se à dinâmica da multiplicidade das dimensões da realidade e apóia-se no próprio conhecimento disciplinar. Isso quer dizer que a pesquisa transdisciplinar pressupõe a pesquisa disciplinar, no entanto, deve ser enfocada a partir da articulação de referências diversas. Desse modo, os conhecimentos disciplinares e transdisciplinares não se antagonizam, mas se complementam. (SANTOS, 2008, p. 75)

Abordar noções matemáticas associadas ao CDI com o uso da Aprendizagem Baseada em Problemas exige uma efetiva pesquisa disciplinar, contudo essa multiplicidade dimensional, caracterizada pelo problema apresentado e pelo contexto de trabalho na sala de aula, permite que haja uma diferenciada articulação entre a Matemática Avançada e outras realidades, inclusive as ligadas a variadas atuações profissionais.

3.2. Conhecendo a metodologia de ensino adotada

Buscando promover a ampliação de conhecimentos e adotar novas estratégias de ensino, propõe-se o uso de um método que rompa com a proposta de recepção e transmissão de conhecimentos fixos e acabados (RIBEIRO, 2008b), a qual transforme as práticas educativas pautadas em moldes convencionais – surgem os ideais da Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL).

Essa metodologia de ensino não se refere a uma abordagem educativa específica. Todavia, pode ter muitos significados diferentes, dependendo tanto das concepções acerca dos métodos de ensino usados e das habilidades do professor (KOLMOS; GRAAFF; DU, 2009).

Para Gijsselaers (1995), esse tipo de metodologia de ensino está além de uma instrução técnica, e deve ser interpretada com um olhar voltado para um desenho curricular, que caracterize o currículo como multidisciplinar.

Segundo MacDonald (2001), o PBL tem se tornado bem conhecido e se mostra atrativo para muitos interessados no meio acadêmico e profissional. Fatos estes gerados devido à sua flexibilidade e diversidade, bem como as diferentes formas nas quais o PBL pode se apresentar, dependendo do contexto no qual está inserido.

Para ser uma proposta de ensino bem sucedida, essa organização da aprendizagem deve ser desenvolvida mediante a análise das práticas culturais, conhecidas pelos atores envolvidos (KOLMOS; GRAAFF; DU, 2009).

Sob tais perspectivas, esses autores descrevem alguns princípios comuns que permeiam os diversos modelos existentes do PBL, que podem ser contemplados em três abordagens: aprendizagem, conteúdo e aspectos sociais.

A aprendizagem cognitiva é interpretada como o princípio central da motivação e fundamentação teórica do PBL. Sua abordagem envolve o problema (ou o projeto, quando for o caso), a experiência e o contexto. A abordagem desse processo é caracterizada como social, devido à aprendizagem colaborativa, que permite o trabalho em equipes, com participação dirigida. Por meio dela, são trabalhados aspectos que envolvem a comunicação e o diálogo, bem como a tomada de decisões.

Quanto aos conteúdos contemplados, podemos citar aspectos interdisciplinares, os quais vão além das fronteiras e dos métodos tradicionais; as grandes relações entre

teoria e prática, que envolvem o uso de investigações e estudos complementares; e o caráter exemplar, pois os possíveis resultados provenientes da aprendizagem podem tornar os objetivos do currículo mais palpáveis.

Em linhas gerais, o método PBL pode ser interpretado como “uma coleção de problemas cuidadosamente construídos, os quais são apresentados a pequenos grupos” (SCHMIDT et al., 2007, p. 92). Na resolução desses problemas normalmente são necessárias explicações teóricas subjacentes. Esse autor ainda descreve que, na medida do possível, tais problemas são derivados da prática profissional, ou seja, situações reais ou realísticas (plausíveis de ocorrerem).

Para Cyrino e Toralles-Pereira (2004), os problemas ou a adoção de situações que permitem gerar dúvidas e inquietações, conduzem a novas descobertas e a buscas por respostas, envolvendo processos de equilíbrio e desequilíbrio do ponto de vista cognitivo, de acordo com as ideias de Piaget. Por meio de múltiplas interações podem ocorrer o levantamento de hipóteses, diferentes formas de comparação, de investigação e de análises (individuais e/ou coletivas) que destacam o real papel do aluno em prol de sua aprendizagem.

Por isso é imprescindível o uso do raciocínio hipotético-dedutivo. Ribeiro (2008b) afirma que podem ocorrer o desenvolvimento da autonomia e uma verdadeira integração de conhecimentos e habilidades elementares para a proposta de soluções, por exemplo, a perplexidade frente a uma situação problema; a exploração e a análise dos componentes da situação com o intuito de defini-la e esclarecê-la; a aplicação e verificação de hipóteses por meio da ação na realidade para ver suas consequências; etc. Reitera-se que:

PBL é um currículo de desenvolvimento e sistema de entrega que reconhece que é preciso desenvolver habilidades de resolução de problemas, bem como a necessidade de ajudar os alunos a adquirir necessários conhecimentos e habilidades. (HASSAN et al., 2004, p. 1)

Dessa forma, o foco da Aprendizagem Baseada em Problemas está amparado na organização de conteúdos curriculares em torno de cenários de problemas, em vez de assuntos ou disciplinas. O trabalho em grupos ou equipes permite que os alunos se envolvam com a situação complexa apresentada. São eles que devem decidir quais são as informações necessárias e quais as habilidades que precisam desenvolver

para gerir a situação de forma eficaz (SAVIN-BADEN, 2000). Isso não exclui a atuação do professor, o qual deve realizar as mediações necessárias, permitindo que o aluno atue ativamente no processo de ensino e aprendizagem.

A proposta do PBL explora o desenvolvimento de várias habilidades e competências, por meio de várias situações, como: a análise de concepções prévias dos alunos; a promoção de conflitos cognitivos (discussões em grupo); a construção de novas ideias; permite uma revisão das tarefas realizadas; propõe o estabelecimento de soluções, bem como a validação das mesmas por meio de formalizações; dentre outras, conforme Ribeiro (2008b).

De acordo com Hmelo-Silver (2004), o PBL permite que os estudantes se tornem responsáveis por suas aprendizagens. Segundo essa autora, há um duplo enfoque em relação ao aprendizado, ocorre tanto o desenvolvimento quanto a construção do conhecimento.

Essa metodologia de ensino possibilita um currículo estruturado que, conforme Hmelo-Silver (2004), ajudam os estudantes a construir uma extensiva e flexível base de conhecimentos; desenvolver de modo efetivo as habilidades de resolução de problemas; desenvolver habilidades autodirigidas e aprendizagem ao longo da vida; se tornarem colaboradores efetivos e intrinsecamente motivados para aprender.

Ainda pontuando esses princípios, Ribeiro (2008b, p.15) destaca que: “apesar de sua história relativamente recente, o PBL não pode ser considerado uma metodologia nova, na medida em que a aprendizagem a partir do confronto com um problema tem acontecido desde os primórdios da civilização”.

Angelo e Bertoni (2011) observam que o PBL é uma forma de ensino e aprendizagem colaborativa, construtivista e contextualizada, na qual situações problema são utilizadas para iniciar, direcionar e motivar a aprendizagem de conceitos, teorias e desenvolvimento de habilidades e atitudes no contexto de sala de aula, isto é, sem a necessidade de conceber disciplinas específicas para este fim.

O PBL não possui uma fundamentação teórica específica, apesar dos seus longos anos de experiências práticas. Segundo Mamede e Penaforte *et al* (2001), seus fundamentos remetem-se a bases teóricas de educadores como: Dewey, Piaget,

Ausubel, Paulo Freire, dentre outros e está pautado em teorias construtivistas, pois valoriza muito o aprender a aprender.

Para Schmidt (1993), as raízes do PBL estão pautadas em Dewey, quando aborda referências sobre aprendizagem independente, e também em Bruner, quando realiza análises a respeito da motivação intrínseca.

Acreditamos que esses embasamentos teóricos ressaltam o quanto essa metodologia de ensino pode contribuir para o desenvolvimento da criticidade e da autonomia pessoal e profissional do indivíduo.

Sendo assim, no contexto universitário, por meio de um ambiente de aprendizagem ativo, há possibilidades dos alunos construírem aprendizagens significativas a partir de experiências vividas e dos estímulos que recebe para aprender. Os conhecimentos não são simplesmente reproduzidos, aceitos de forma passiva, mas o sujeito que aprende participa de forma realmente efetiva durante todo o processo.

Por isso, julga-se necessário superar fundamentos de ensino que permeiam apenas a transmissão de conhecimentos na qual os indivíduos assumem papéis de meros receptores de informações. Em consonância aos ideais de Freire (1996), a educação não pode ser uma prática de depósito de conteúdos, que considere agentes passivos, como seres vazios. A mesma exige situações problema, permeadas por vivências de experiências significativas, que permitam novas descobertas, novas aprendizagens.

Julgamos que essa metodologia, a qual tem como característica fundamental o uso de problemas que são plausíveis de ocorrerem no âmbito de determinadas áreas do conhecimento, ou mesmo em determinadas profissões (RIBEIRO, 2008b), pode colaborar para o favorecimento do processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Nossas argumentações se apoiam em contribuições de estudos advindos de diferentes pesquisadores, os quais analisam a eficácia e a adoção do PBL ao longo dos anos.

Hmelo-Silver (2004), por exemplo, destaca que os currículos baseados em problemas propiciam aos estudantes uma experiência guiada em aprendizagens por meio da resolução de problemas, sendo esses de caráter complexo, pertencentes ao mundo real.

Também nos respaldamos em considerações de autores que reforçam a necessidade de se criar ambientes propícios à aprendizagem e a uma melhor atuação dos estudantes no processo de ensino. Problematizações fictícias (simulações) geradas a partir de uma possível prática profissional, também podem ser promovidas no PBL, a fim de favorecer tanto a interdisciplinaridade quanto a transdisciplinaridade.

Em relação a esse aspecto, D'Ambrósio (2005) reitera a presença da multidisciplinaridade observada nas práticas educacionais, além de analisar a importância da interdisciplinaridade em diferentes contextos. Por meio desta, é possível transferir métodos de algumas disciplinas para outras, o que permite a criação de novos objetos de estudo, pois os resultados são justapostos e as informações se mesclam, logo, surgem novas aprendizagens.

Ocorrerá a transdisciplinaridade se os conhecimentos forem “além das limitações impostas pelos métodos e objetos de estudos das disciplinas e das interdisciplinas” (D'AMBRÓSIO, 2005, p. 103).

Consideramos que a promoção gerada por essa transdisciplinaridade está totalmente atrelada às propostas do PBL, pois é definida como “um enfoque holístico ao conhecimento, baseado no reconhecimento total e final e, portanto, permanentemente buscando novas explicações e novo conhecimento e, conseqüentemente, modificando comportamentos” (D'AMBRÓSIO, 2005, p.103).

Ainda nos respaldamos nas ideias desse pesquisador para destacar que no enfoque transdisciplinar estão também envolvidos processos psicoemocionais de geração de conhecimento, os quais são essências para a criatividade. Essa integração entre tais aspectos pode, então, propiciar o desenvolvimento do pensamento crítico, de habilidades de solução de problemas, de trabalho em equipe, integrando conhecimentos associados com a teoria e a prática, com base em afirmações de Ribeiro (2008b), fatores estes que reputamos serem relevantes para a promoção de um aprendizado significativo.

Schmidt (1993) destaca que a Aprendizagem Baseada em Problemas pode ocorrer dentro de um contexto semelhante ao que o aluno possivelmente encontrará em sua atuação profissional. Nessa mesma linha de pensamento, Kaufman (1998, p. 2) destaca que as formas como os adultos aprendem estão ligadas ao PBL, à medida

que “são mais motivados a aprender quando as suas próprias necessidades e experiências de aprendizagem fornecem o ponto de partida para o foco”. Nesse momento, surge à ativação do conhecimento prévio do aluno e de outras relações que podem começar a serem estabelecidas, seja qual for o nível educacional.

Observamos que o “PBL é uma instrutiva abordagem centrada no aluno que capacita os estudantes a realizar pesquisas, integrar teoria e prática e aplicar conhecimentos e habilidades para desenvolver uma solução viável para um problema definido” (SAVERY, 2006, p.12). Sob esse viés, destacamos que nosso intuito é favorecer o aprendizado. Por isso, este trabalho de pesquisa é direcionado ao docente universitário, o qual tenha interesses em pesquisas ligadas a metodologias de ensino ativas. Acreditamos que é a partir do trabalho do professor e de seus interesses por formas diferenciadas de ensinar que novas abordagens podem ser adotadas. Isto é, mediante seus propósitos e intencionalidades, haverá mudanças no processo de ensino e aprendizagem como um todo.

A Aprendizagem Baseada em Problemas, conforme Savin-Baden *et al* (2011) é uma proposta que é caracterizada pela flexibilidade e diversidade, de modo que sua implantação pode ocorrer de várias maneiras, entre diferentes temas, currículos e disciplinas, em contextos diversificados. Essa variação depende dos atores envolvidos no programa e, também, consideramos que o PBL não deve ser interpretado como uma forma ou um método de aprendizagem, mas sim, como a aprendizagem de diferentes formas.

Por meio da seleção de contribuições teóricas pertinentes, pretende-se explicar algumas implantações dessa proposta de ensino nos diversos campos educacionais, tanto internacionalmente quanto nacionalmente.

3.3. Implantações do PBL ao longo da história

Um dos princípios essenciais da Aprendizagem Baseada em Problemas pauta-se em promover articulações entre diversos campos de conhecimento de forma interdisciplinar. Também, procura atender às demandas da sociedade contemporânea, quanto ao desenvolvimento de habilidades e competências necessárias às futuras atuações profissionais dos estudantes.

As primeiras experiências práticas do PBL ocorreram em ambientes de aprendizagem voltados à Educação Médica. Na Escola de Medicina da Universidade de McMaster, em meados dos anos 60, a inserção de problemas como componente central passou a ser implantada nos currículos. Isso ocorreu devido aos grandes vínculos que a Universidade possuía com a comunidade e de acordo com as necessidades dos estudantes, os quais se viam em situações reais ou simuladas que envolviam alguma prática relacionada aos seus conhecimentos teóricos. Esses alunos trabalhavam, em grupos, e toda mediação em favor das análises dos problemas era realizada por tutores.

Essa nova forma de ensinar promovida no Canadá surgiu a partir de experiências semelhantes que ocorreram nos Estados Unidos, uma na Escola de Direito da Universidade de Harvard, em 1920, e outra, por meio dos estudos de casos em cursos de Medicina, trabalhados na Universidade Case Western Reserve, em meados dos anos 50.

Woods (1994 *apud* BRANDA, 2009)¹, afirma que inicialmente o PBL ateu-se ao curso de Medicina, no entanto, ao longo dos tempos, foi estendido a outros programas de graduação e pós-graduação vinculados à Faculdade de Ciências da Saúde da McMaster. É válido ressaltar que algumas disciplinas de outros cursos da universidade, como Engenharia, também adotaram características desse tipo de aprendizagem.

Tais descrições enaltecem a busca por novas formas de promover o ensino e a aprendizagem que emergiram principalmente da necessidade em aproximar os conhecimentos teóricos da futura atuação prática dos alunos.

O grupo que consolidou o curso de medicina na McMaster buscou mudanças no processo de ensino-aprendizagem dessa matéria, mas o fazia sem muita certeza de quais seriam elas. Guiou-se pelo que intuitivamente considerava uma metodologia adequada para um aprendizado efetivo. (BRANDA, 2009, p. 209)

Ribeiro (2008b) esclarece que o uso dessas concepções em Cursos de Medicina tem como referências originais os pensamentos de Howard Barrows, destacando-se como um dos pioneiros no desenvolvimento do PBL. Aliás, o mesmo descrevia que muitos

¹ WOODS, D. R. **Problem-based learning**: how to gain the most from PBL. Ontário: DR Woods Publishing, 1994.

alunos concluíam os cursos com grande embasamento teórico, no entanto, com poucas estratégias e poucos comportamentos associados às suas aplicações práticas, como a elaboração de um diagnóstico. Durante a realização do próprio curso isso já era bem perceptível, pois muitos alunos mostravam-se insatisfeitos e descontentes por terem grande quantidade de conhecimentos, mas os consideravam irrelevantes para sua prática profissional. Nesse momento, surgiram várias reflexões e questionamentos sobre os verdadeiros propósitos e finalidades dos Cursos de Medicina.

De acordo com Branda (2009, p. 209), “é sabido que Howard Barrows foi líder na inovação docente e na difusão do PBL, incluindo o uso de grupos de pacientes típicos e outros métodos de avaliação das competências do profissional das Ciências da Saúde”.

Essas ideias de aproximação de conteúdos às realidades práticas passou a se tornar muito interessante no meio Acadêmico.

Segundo Savery (2006), o PBL começou a fazer parte da estruturação de um currículo médico visando o desenvolvimento de diversas habilidades, por exemplo, lidar com problemas e tomar decisões fundamentadas em situações desconhecidas; raciocínio crítico e criativo; adoção de uma abordagem mais universal e holística; praticar a empatia; colaboração produtiva em grupos ou equipes; etc.

Segundo MacDonald (2001), as aplicações iniciais do PBL surgiram em Universidades como Case Western Reserve (USA), McMaster (Canadá), Maastricht (Holanda) e Newcastle (Austrália). E, com o passar dos anos, tal estratégia foi se expandindo a outros países e contextos.

Camp (1996) também descreve que as origens do PBL ocorreram em tais universidades e, pondera que, além destas, a Universidade do Novo México, nos Estados Unidos, foi mais uma das referências da aplicação dessa metodologia no meio universitário.

Inicialmente esse processo foi lento. Entretanto, agora:

Estamos vendo uma explosão no uso de PBL em suas várias adaptações. Hoje, a maioria das escolas médicas dos EUA e muitas

em quase todos os países do mundo estão implementando (ou estão planejando implementar) o PBL em seus currículos, em maior ou menor grau. Além disso, o PBL se espalhou para as escolas de ciências da saúde, enfermagem, odontologia, farmácia, medicina veterinária e saúde pública. Mais longe, escolas de arquitetura, negócios, direito, engenharia, silvicultura, ciências policiais, serviço social, educação e muitas outras áreas profissionais adotaram a estratégia. (CAMP, 1996, p. 1)

Em meados dos anos 80 e 90 o PBL passou a ser aceito em toda a América do Norte e Europa. No Brasil, a Aprendizagem Baseada em Problemas também começou a ser inserida em diversos campos de estudo. A Escola de Saúde Pública do Ceará tornou-se notória por ser a primeira instituição do país a adotar uma proposta tão inovadora. Fato este que ocorreu em 1994, em cursos de educação continuada (COELHO-FILHO; SOARES; SÁ, 1998).

Segundo Cyrino e Toralles-Pereira (2004), outras implantações foram realizadas pela Faculdade de Medicina de Marília (FAMEMA), em São Paulo, em 1997, e na Universidade Estadual de Londrina (UEL), no Paraná, em 1998. Já em meados do ano de 2001, a Universidade Federal da Bahia e a Pontifícia Universidade Católica do Paraná inseriram o PBL em currículos de seus cursos.

Podemos citar também propostas de ensino no caráter PBL em outras renomadas universidades brasileiras: a Universidade de São Paulo, na Escola de Artes, Ciências e Humanidades (EACH – USP Leste) e na Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade (FEA – USP Ribeirão Preto), por meio da criação de um novo curso de MBA; a Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR), em seus cursos de Engenharia; a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), nos cursos de Medicina e Engenharia Biomédica; dentre outras.

Conseqüentemente, conforme sua difusão no mundo, várias pesquisas foram realizadas para investigar a viabilidade ou não de tal método de ensino, Savery (2006) cita alguns pesquisadores, como Albanese e Mitchell (1993), que elaboraram uma meta-análise englobando 20 anos de estudos com o uso do PBL; Vernon e Blake (1993), concluíram em suas considerações que os alunos que estudaram com o PBL tiveram melhores habilidades de resolução de problemas clínicos.

Ribeiro (2008a) também ressalta que em suas investigações envolvendo o PBL, tanto alunos quanto docentes, se tornaram mais dedicados e produtivos. Segundo esse

pesquisador os alunos do PBL, em geral, recebem melhores avaliações de supervisores de estágios ou empregadores, pois mostram maior desenvoltura profissional, iniciativa e espírito empreendedor. No entanto, também reitera que há discordâncias quanto às análises conceituais, afinal, no método convencional, os alunos acabam memorizando aspectos que consideraram fundamentais em um processo de avaliação. Por isso, é preciso considerar com cautela os diversos contextos que envolvem esse novo método de ensino.

Segundo Mamede e Penaforte *et al* (2001) existem perspectivas de que o PBL assuma grande importância nos campos educacionais no Brasil, na medida em que se buscam metodologias alternativas voltadas à articulação da teoria com a prática profissional, promovendo reais transformações nas formas atuais de ensinar e aprender.

De acordo com o que relatamos até aqui, acreditamos que elaborar um estudo relacionado ao PBL e ao ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos destaca o ineditismo da pesquisa. Percebe-se que o PBL tem colaborado para o desenvolvimento e construção de aprendizagens e conhecimentos transdisciplinares. Pressupomos ainda que em relação ao ensino e aprendizagem de noções de Cálculo Diferencial e Integral, faz-se necessário promover novos direcionamentos, com mediações que, possivelmente, ultrapassem barreiras que dificultam esse processo.

3.4. Articulação e delineamento do PBL

3.4.1. O problema

Conforme o próprio termo esclarece, na Aprendizagem Baseada em Problemas, o foco central de todo processo são os problemas. A “aprendizagem por problemas é uma condição da existência humana. Nas nossas tentativas para resolver muitos problemas do cotidiano, a aprendizagem ocorre” (BARROWS; TAMBLYN, 1980, p. 15). Ou seja, de um modo ou outro há necessidade de se interligar os conhecimentos, e é preciso apropriar-se de novas informações para resolver determinadas problematizações. E, mais:

Seria seguro dizer que a grande riqueza da informação nós possuímos em nosso banco de memória, o que manteve-se lá como uma consequência de ter trabalhado com problemas que foram enfrentados em tal situação da vida, como: escola, trabalho, situações sociais, nossos hobbies [...]. (BARROWS; TAMBLYN, 1980, p. 1)

Nessa abordagem de ensino, o interesse por problemas serve como um estímulo e guia para a aprendizagem do aluno. Aprendizagem Baseada em Problemas e a resolução de problemas em si não são estratégias que se contrapõem.

O que a diferencia [a Aprendizagem Baseada em Problemas] da resolução de problemas é a meta da aprendizagem: não é resolver um problema que foi apresentado. Ao invés disso, o problema é usado para que os alunos identifiquem suas próprias necessidades de aprendizagem, como eles fazem para compreender o problema, como conseguem juntar, sintetizar, e aplicar a informação para o problema, e como iniciam o trabalho efetivamente para aprender com os membros do grupo assim como com os tutores. (WALSH, 2005, p. 7)

MacDonald (2001) salienta que a resolução de um problema pode ser feita por meio de uma série de palestras, seminários, laboratórios, workshops, guias de leituras, dentre outras formas de partilhar e construir conhecimento. Ou ainda, ocorre a caracterização da resolução de um problema encontrada ao final de um capítulo em um padrão de um livro didático. Percepções como essas, não descrevem uma proposta do PBL em suas bases originais.

A partir dessas considerações entendemos que um problema no PBL precisa ser bem delineado. Sua função vai além de apresentar aos alunos uma determinada situação ou aplicação de conteúdo; há o intuito de motivar a aprendizagem e promover novos conhecimentos por meio de aspectos ligados a diferentes campos profissionais. Com isso,

Um problema no PBL deve ser entendido como um objeto cujo caminho para sua solução não é conhecido. Entender um fenômeno intrigante, encontrar uma maneira melhor de fazer algo, uma melhor forma de projetar alguma coisa, de construir algo ou de criar uma obra de arte também podem ser considerados um problema nesta metodologia. (RIBEIRO, 2008b, p. 29)

Assim, no PBL, o contato com o problema é o primeiro passo deste processo de aprendizagem. E, normalmente, a situação apresentada não é resolvida por meio de um algoritmo simples, pois exige que os alunos busquem alternativas para fundamentar as soluções que a situação gera (HMELO-SILVER; BARROWS, 2008). Aliás, Hmelo-Silver (2004) destaca que para se promover pensamentos flexíveis, os problemas criados devem ser mal estruturados e de fim aberto. E em relação à ativação da motivação intrínseca, eles devem ser reais ou realísticos e ressoar com

as experiências dos estudantes. Por exemplo, pode-se elaborar/adaptar conhecimentos matemáticos às áreas de Engenharia, de Economia, entre outras.

Ainda na visão dessa autora, um bom problema proporciona um retorno que permite aos alunos avaliar a eficácia de seu conhecimento, de sua argumentação e de suas estratégias de aprendizagem. E, mais:

Bons problemas frequentemente exigem soluções multidisciplinares [...]. A necessidade de reunir conhecimentos de uma grande gama de pesquisas permite que os alunos visualizem como o conhecimento é uma ferramenta útil para a resolução de um problema. Bons problemas também promovem habilidades de comunicação [...]. Os problemas multidisciplinares devem ajudar a construir conhecimentos extensivos e flexíveis porque a informação não é aprendida de forma isolada. (HMELO-SILVER, 2004, p. 244)

Percebe-se com o decorrer dos estudos, que o trabalho com as pesquisas cognitivas e experiências práticas com PBL tem feito importantes avanços na identificação de características de um bom problema. Algumas dessas características são: conter múltiplas possibilidades de soluções; exigir mais informações para compreender o problema que é inicialmente avaliado; promover interesses gerais e controvérsias pertinentes às questões indicadas; ser aberto e suficientemente complexo; conter conteúdos que são autênticos para a disciplina.

Mediante esses aspectos nota-se a relevância do trabalho em grupos mediados por um tutor. Aliás, (PROBLEM-BASED [...], 2001), destaca que atividades no formato do PBL promovem discussões entre os membros do grupo e fazem com que os alunos se mantenham motivados para aprender mais sobre seu objeto de estudo. As informações são articuladas e os conhecimentos são elaborados e reelaborados. Características essas que declaram o quanto o ambiente proposto pelo PBL é propício para futuras aprendizagens.

3.4.2. Os atores envolvidos

O PBL pode adotar inferências além dos moldes tradicionais, tanto em relação ao ensino como também à aprendizagem. Isso porque um novo ambiente de aprendizagem passa a ser construído. Entendemos que:

Existe uma ligação entre o método de ensino e a profundidade e complexidade da aprendizagem, como o estudante pode ser esperado

para chegar a um nível de compreensão analítica e complexa através do trabalho baseado em problemas que não se faria possível em aulas convencionais. (GRAAFF; KOLMOS, 2003, p. 660)

É necessária que haja uma compreensão efetiva de um “pacote” PBL, denotação essa usada por Conway e Little (2000). A interpretação desse termo se embasa na junção de princípios elementares que funcionam como condução central para o desenvolvimento do processo. Incluem desde a interpolação de lista de conceitos a serem analisados e explorados até a orientação/sugestão de recursos que podem ser utilizados. Vejamos algumas considerações em relação à ótica do ensino e à ótica da aprendizagem.

a) Ótica do ensino: o docente atuando como tutor

Na Aprendizagem Baseada em Problemas, o professor que conduz as aulas agora é chamado de tutor (ou facilitador) do processo de ensino e aprendizagem. Sua postura passa a ser mais diretiva em favor do desenvolvimento da autonomia dos estudantes. É ele que irá interagir com os grupos de alunos, realizando as mediações em meio ao processo de construção dos conhecimentos, e que irá fornecer novos encaminhamentos à pesquisa. Suas reflexões e atuações são embasadas e construídas a partir de suas próprias vivências com os alunos, mediante sua própria prática (RIBEIRO, 2008b).

Isso demonstra o quanto esse professor precisa ter uma postura flexível.

O facilitador tem que levar em conta o comportamento dos alunos, personalidades e dificuldades, e adotar uma atitude que incentiva os alunos a iniciar a discussão, fazer perguntas, desafiar declarações e pedir esclarecimentos. Às vezes, inicialmente, o facilitador pode ter que trabalhar muito duro para gerenciar o grupo sem parecer ser autoritário, mas eventualmente, o grupo deve ser capaz de funcionar eficazmente na ausência do moderador. (WOOD, 2004b, p. 3)

Por meio de um contexto autogerido, conforme Woods (2006), o olhar e a postura do professor são modificados, ele torna-se um guia, um mentor; ao invés de ter o controle percebido por meio de práticas convencionais, isso tende a ser notado quando os alunos incorporam suas aprendizagens. Assumindo sua postura de tutor, ele passa a monitorar e avaliar processos de autoavaliação realizados pelos alunos/grupos; isto é, torna-se um motivador e incentivador constante das aprendizagens.

Nessa proposta, o tutor não executa um trabalho amparado na tríade definições-explicações-exercícios. Pelo contrário, ele instiga o aprendizado, provocando, desafiando seus alunos a resolverem determinada situação, pertinente às questões profissionais.

As aulas se caracterizam então como sessões de tutorias, nas quais os problemas são trabalhados em parcerias. Segundo pesquisas feitas por Ribeiro (2008b), a aprendizagem se torna mais agradável e as aulas mais dinâmicas, fatores estes que podem ser muito favoráveis à produção de novos conhecimentos.

Também observamos que o tempo de preparo e dedicação do tutor acaba sendo um pouco maior em relação ao enfoque dado em disciplinas específicas. No PBL, o tutor não assume a postura de especialista de determinada área, mas procura integrar conhecimentos de diferentes especificidades. E isso, pode também contribuir para um aumento da imprevisibilidade. Mesmo realizando planejamentos antecipados, ele pode se deparar com novas situações e questionamentos para os quais não possui respostas prontas. Algumas decisões e planos de ação devem ser criados muitas vezes durante a própria dinâmica das aulas. Como não haverá uma abordagem totalmente expositiva, o tutor precisa se atentar aos direcionamentos e formas de controle em relação ao conteúdo trabalhado, além de estar mais suscetível a situações inesperadas.

Entendemos que há vantagens na utilização de uma dinâmica diferenciada por meio do PBL. No entanto, é preciso considerar que, assim como em qualquer outra metodologia de ensino, existem riscos e alguns obstáculos a serem enfrentados, como: possíveis imprecisões acerca do conhecimento de teorias mais avançadas; dificuldades do professor em abordar conteúdos de diversas áreas do conhecimento por meio de problemas ou mesmo para direcionar o trabalho em grupos; a exigência de maior disponibilidade de tempo para realização de pesquisas; além de outros aspectos ligados a questões institucionais (RIBEIRO, 2008b).

Por isso, a atuação do professor também muda em um processo de ensino no formato PBL, pois novos horizontes são construídos. Seu papel tem o intuito de fomentar as aprendizagens, de motivar os estudantes, de propiciar situações que os faça perceber o quanto há necessidade de aprender a aprender. O comprometimento tanto do aluno

quanto do tutor tende a ser mais expressivo durante todo o desenvolvimento desse processo. Ambos se tornam mais críticos e participativos.

b) Ótica da aprendizagem: o aluno com participação ativa no processo

Em meio a todo o ciclo PBL, os estudantes tendem a participar mais do processo de construção de conhecimentos. Existe abertura para discussões e negociações das possíveis soluções geradas, analisando as hipóteses e alternativas, e a elaboração de argumentos racionais e bem formulados para as mesmas (HMELO-SILVER; BARROWS, 2008). No capítulo posterior serão fornecidos alguns direcionamentos de como esse processo pode ocorrer.

Isso deve ter se tornado claro agora que o PBL exige dos estudantes o desenvolvimento de uma ampla gama de habilidades para disponibilizá-las, para aprender efetivamente – equipes trabalhando habilidades, habilidades de informação e, talvez, o mais importante para o desenvolvimento profissional, uma alta ordem das habilidades cognitivas. Em vez de aceitar tranquilamente a informação transmitida para eles através das muitas formas tradicionais de ensino, os alunos agora têm de se envolver criticamente com o conhecimento que eles vêm adquirindo para eles próprios. (MACDONALD, 2001, p. 3)

Complementamos ainda que:

O método PBL exige que os alunos se tornem responsáveis pela sua própria aprendizagem. O professor no PBL é um facilitador da aprendizagem dos alunos, e suas intervenções tendem a diminuir quando os alunos assumem progressivamente a responsabilidade de seus próprios processos de aprendizagem. (HMELO-SILVER; BARROWS, 2006, p. 24)

Nas palavras de Ribeiro (2008b) os alunos passam a ter maior apropriação da aprendizagem, a qual é incentivada pela delegação de responsabilidades. E, nas mais diferentes fases do processo, há uma ativa atuação dos estudantes que são demonstradas tanto de forma individual quanto em grupos, o que inclui: o início das investigações e das ideias centrais do problema; o levantamento e priorização das principais questões de aprendizagem; a definição dos objetivos e estratégias/planejamentos a serem adotados; o compartilhamento das informações e decisões; os processos de aplicação e a avaliação dos conhecimentos (englobando a solução dos problemas, os conceitos trabalhados, a eficácia e reflexões acerca dos planos de ação adotados).

Consideramos que um ambiente de aprendizagem no formato PBL é diferenciado e exige uma postura mais construtiva por parte dos universitários, visando a promoção de saberes transdisciplinares.

Em suas experiências práticas com a metodologia, Filho e Ribeiro (2009, p. 27), relatam que “dentro dos grupos, os alunos assumiam, alternadamente, funções de líder, relator, porta-voz e membro participante do grupo. Essas diferentes funções buscavam colocar os alunos em situações reais, embora, simuladas, da vida profissional [...]”.

O fato de os estudantes estarem agrupados não significa que a abordagem é diferenciada e eficaz. É preciso incentivá-los a realmente trabalhar em conjunto, tendo atitudes e comportamentos condizentes aos objetivos almejados.

Esse contexto geral esclarece que o contato com o mundo social não se detém apenas às práticas de interação com os outros, em certo espaço fechado. Isto é, os alunos envolvidos no PBL devem participar de uma efetiva prática social, que pode envolver tempos e lugares específicos (uso de bibliotecas, laboratórios de química, física, informática, matemática, recursos audiovisuais, etc), respeitando normas e valores (VALERO, 2006).

Em nossa perspectiva, consideramos que só se aprende, fazendo,

Isto é, (utilizando informações para resolver um problema), as pessoas estão mais propensas a lembrar o que elas aprenderam, e mais importante ainda, é mais provável para digerir ou processar as informações que estão recebendo e refletir sobre como eles aprenderam, especialmente se há incentivos para que eles façam isso. (WOOD, 2004b, p. 6)

É fundamental considerar que podem ocorrer alguns impasses nesse processo de mudanças. Os alunos, por exemplo, podem se sentir ameaçados estando em um sistema de ensino diferenciado e sua forma de trabalho passa a ser mais ativa, pois estará em contato direto com outros indivíduos que possuem diferentes conhecimentos e habilidades (WOOD, 2004a).

Optamos em propor o ensino de noções de Cálculo Diferencial e Integral por meio de uma metodologia ativa, porque esta “destina-se a capacitar o indivíduo a pensar de uma forma flexível e poderosa” (BARUFI, 1999, p. 8).

Discussões acerca de estratégias de ensino ativas já eram realizadas durante o movimento de Reforma do Cálculo, mencionado em capítulos anteriores. Segundo a pesquisadora Barufi (1999), nesse contexto de busca por mudanças, essa estratégia era uma das poucas que estava ciente das dificuldades cognitivas e das preocupações e tentativas de como resolvê-las de fato.

Outro ponto importante acerca do uso de metodologias com essa característica é que:

A interação social também pode ser determinante no desenvolvimento de habilidades matemáticas pelos alunos [...]. Não há dúvida de que o enfoque social sobre a interação entre as pessoas na sala é muito importante em tais micro-processos: é o lugar onde todos os dias vai abastecer a capacidade dos alunos para não só entender o conteúdo de matemática escolar, mas também e acima de tudo agir em seu conhecimento. (VALERO, 2006, p. 3)

Sendo assim, a promoção de ambientes de aprendizagens ativos, como o PBL, pode ser relacionado a tópicos de Matemática Avançada, com vistas a um processo educativo mais significativo e com expressivas atuações tanto de discentes quanto dos docentes.

3.5. Relações entre Resolução de Problemas (RP), Modelagem Matemática (MM) e PBL

Tendo em vista as análises realizadas até o momento e às demandas da sociedade atual, pretende-se evidenciar os aspectos fundamentais que levaram à escolha da metodologia de ensino aqui adotada.

Nossa proposta de estudo, que se ampara no uso do PBL, tem como base a inserção de um problema que tenha “prevalência, valor integrativo, valor protótipo, alto valor de impacto e fraca estruturação”, conforme afirma Ribeiro (2008b, p. 30). Se esse problema englobar uma tarefa concreta que simule ou represente uma situação passível de ser encontrada pelos futuros profissionais, podendo ser real, ou potencialmente real, as possíveis soluções a serem encontradas poderão contribuir para a promoção de uma significativa aprendizagem. Acreditamos que por meio do elo entre diferentes áreas do conhecimento, os conceitos e conteúdos matemáticos podem ser abordados de modo mais natural.

Notamos que há abordagens alternativas, baseadas em atuações construtivas e colaborativas, que vêm sendo adotadas significativamente no ensino da Matemática Avançada. Contudo, consideramos relevante atrelar a formação do universitário com a prática profissional.

Dentre algumas tendências metodológicas usadas na Educação Matemática, podemos citar a Resolução de Problemas (RP) e a Modelagem Matemática (MM).

Nessas metodologias há dois grandes potenciais: estimular mais o aluno a aprender e envolver relações entre teoria e prática, de forma significativa e por intermédio do uso de problemas. A esse respeito,

Orientar um currículo para a solução de problemas significa procurar e planejar situações suficientemente abertas para induzir nos alunos uma busca e aproximação de estratégias adequadas não somente para darem resposta a perguntas escolares como também às da realidade cotidiana. (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 14)

Pode-se inferir que explorar o desenvolvimento de habilidades e competências por meio de problemas favorece de alguma forma a articulação entre teoria e prática. Isso porque, os problemas, ao serem inseridos no contexto educacional têm como objetivo desenvolver a autonomia e a capacidade de resolver além de meros exercícios repetitivos e automatizados.

Segundo Echeverría e Pozo (1998) é preciso que haja um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre os passos a serem seguidos em busca da resolução de um determinado problema, o que vai muito além do uso de habilidades ou técnicas aprendidas.

A proposta da Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, assim como o PBL, também tem como ponto de partida adotar o problema como forma de construir novos conhecimentos. Segundo Onuchic e Allevato (2011), os alunos podem se tornar construtores de seu próprio conhecimento e os professores seriam os responsáveis por conduzir tal processo.

Ressalta-se que a Resolução de Problemas tem como razão fundamental ajudar os educandos a compreender conceitos e processos como técnicas operatórias necessárias a partir do tema que se deseja trabalhar. Ou seja, com o planejamento

realizado e objetivo definido, o aluno poderia colocar em pauta o seu modo de pensar (matemático), justificando seu raciocínio, dando significado ao que faz. O professor assume o papel de avaliador dos processos e dos resultados gerados.

Nessa abordagem também se observa que há possibilidades de promover conexões entre os diferentes ramos da Matemática e outras áreas de conhecimento. Na execução da RP, como metodologia, “o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 85). Tanto na RP quanto no PBL, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conhecimentos.

Essas autoras elaboraram um roteiro de desenvolvimento da Resolução de Problemas, nos quais são abordadas nove estratégias: a preparação do problema; a leitura individual do problema; a leitura em conjunto (nova leitura do problema em grupos); a resolução do problema; a etapa de observar e incentivar, onde o professor estimula o trabalho cooperativo; ocorre a fase dos registros das resoluções na lousa (pelos grupos); existe a plenária, a qual possibilita a realização de discussões; a etapa da busca pelo consenso e, por último, a fase da formalização do conteúdo (realizada pelo professor).

De acordo com o PCN (BRASIL, 1998), pressupostos como a elaboração de um ou vários processos de resolução (por tentativas, levantamento de hipóteses ou simulações), a comparação de resultados com o de outros colegas, assim como a validação dos seus procedimentos, são tarefas que englobam a resolução de um problema e estão de acordo com as propostas metodológicas da Resolução de Problemas e do PBL.

George Polya (1995) propõe que para o desenvolvimento da Resolução de Problemas deve-se organizar uma abordagem em quatro fases. São elas: a compreensão do problema; o estabelecimento de um plano; a execução do que foi planejado; a estruturação de um retrospecto da resolução.

Em suas considerações, Polya (1995) descreve que na primeira etapa deve ocorrer não apenas a compreensão do problema, mas também o desejo de resolvê-lo, daí a importância da escolha do problema. Isso porque o aluno deve ter a habilidade de

identificar as partes principais do problema, percebendo e explicitando seus elementos fundamentais. Entende-se que o mesmo será subdividido em partes, analisando os diferentes pontos de vista, primeiro ocorre uma familiarização e depois um aperfeiçoamento do problema.

Se tal pressuposto for alcançado, surge a segunda parte: o estabelecimento de um plano. O professor atua ativamente e discretamente nesse momento. Isso ocorre quando ele realiza sugestões, promove discussões e estimula a proposta de soluções nos grupos. Na fase do retrospecto, ocorre o reexame do problema e reconsiderações acerca da solução proposta, verificando sua validade e plausibilidade.

A Resolução de Problemas sugere a ideia de que seu enfoque é mais direcionado à aplicação de conteúdos específicos. As etapas desenvolvidas por Polya (1995) destacam que o aluno deve ter bastante clareza a respeito do problema e onde se deseja chegar, desde o início de sua análise. Já no PBL, essa clareza pode começar a surgir em etapas posteriores, após a geração de conflitos, do desenvolvimento das pesquisas autônomas realizadas pelo(s) alunos(s), da integração social e trabalho em equipe. Os conhecimentos prévios, por exemplo, podem ser diagnosticados a partir da seleção dos tópicos e dos termos que os alunos conseguem identificar no problema.

Outra abordagem atual que ressalta a utilização de problemas e do uso de situações contextualizadas e interdisciplinares é a Modelagem Matemática. A mesma procura associar aspectos fundamentais que estão em consonância com os PCN (BRASIL, 1998). Dentre eles, podemos destacar a resolução de problemas, o desenvolvimento da tomada de decisões, das capacidades de comunicação e da promoção plena da cidadania.

A Modelagem Matemática aparece como uma proposta que deseja vislumbrar tais aspectos por meio do desenvolvimento de conhecimentos matemáticos aplicados a situações problema. Entre as potencialidades dessa metodologia encontram-se o favorecimento da aprendizagem significativa, a promoção de habilidades e atitudes elementares, as quais são essenciais à formação de um indivíduo crítico e participativo, inclusive no campo profissional.

De acordo com Bassanezi (2011, p. 24), a Modelagem Matemática é:

Um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos [...] a modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na sua linguagem usual. (BASSANEZI, 2011, p. 24)

A aprendizagem realizada por meio dessa metodologia favorece a articulação entre a Matemática e suas aplicações. Esse mesmo autor reitera que a Modelagem Matemática consiste “na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (BASSANEZI, 2011, p. 16). Ele ressalta que é importante propor problemas que sejam de interesse dos alunos, isso pode estimulá-los a aprender.

Blum (1995 *apud* BARBOSA; SANTOS, 2007)² apresenta cinco argumentos fundamentais em defesa da Modelagem Matemática, são eles:

- A motivação, pois os alunos poderiam vislumbrar a aplicabilidade dos temas trabalhados;
- A facilitação da aprendizagem, de forma que as informações estariam conectadas umas às outras;
- A preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas (interdisciplinaridade/diversidade das situações);
- O desenvolvimento de habilidades gerais de exploração por meio da investigação;
- A compreensão do papel social e cultural da Matemática.

Barbosa (2004) acredita que a modelagem pode ampliar as possibilidades de construção e consolidação de sociedades mais democráticas, pois de alguma forma potencializa a intervenção dos indivíduos nos detalhes e nas tomadas de decisões sociais.

O trabalho com a resolução de problemas está presente em todas as metodologias de ensino aqui exploradas. No caso da Modelagem Matemática, Biembengut e Hein (2013, p. 12) descrevem que:

² BLUM, W. Applications and modelling in mathematics teaching and mathematics education – some important aspects of practice and of research. In: SLOYER, C. et al (eds). **Advances and perspectives in the teaching of mathematical modelling and applications**. Yorklyn, DE: Water Street Mathematics, p. 1-20, 1995.

Seja qual for o caso, a resolução de problemas, em geral quando quantificado, requer uma formulação matemática detalhada. Nessa perspectiva, um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real, denomina-se “modelo matemático”. (BIEMBENGUT e HEIN, 2013, p. 12).

Observa-se que a Modelagem Matemática destaca a Matemática como foco central de toda sua estruturação, inclusive pela construção de modelos matemáticos. Aliás, as outras áreas de conhecimento também podem ser articuladas a partir de eixos temáticos, como no caso do PBL.

É possível indicar a Modelagem Matemática como uma abordagem diferenciada no meio acadêmico, articulada a conhecimentos técnicos, científicos, sociais e éticos. Levy e Santo (2011) ressaltam que a modelagem parece restringir algumas perspectivas como a transversalidade, interdisciplinaridade, contextualização e transdisciplinaridade, de acordo com o “paradigma da complexidade” (ou paradigma emergente).

A proposição de etapas da Modelagem Matemática, descritas por Bassanezi (2011), remetem-se a algumas ideias da Matemática Aplicada. Ele indica as seguintes fases:

- Experimentação: momento em que o processamento para a obtenção de dados acontece;
- Abstração: é a base para a formulação dos modelos matemáticos. Destacam-se nessa estrutura a seleção de variáveis, de problematizações, a formulação de hipóteses e a simplificação dos fenômenos envolvidos;
- Resolução: etapa em que a linguagem natural das hipóteses se transforma em uma linguagem matemática coerente; obtém-se, de fato, o modelo;
- Validação: fase de aceitação ou não do modelo proposto;
- Modificação: engloba fatores ligados ao problema original, analisando se os mesmos podem provocar uma rejeição ou aceitação dos modelos elaborados;
- Aplicação.

Esse mesmo autor ressalta,

A ênfase posta no conteúdo abstrato e na quantidade de conhecimentos transmitidos aos alunos para a aplicação de uma metodologia que desenvolva atitudes positivas e capacidades de matematizar situações reais, de pensar com lógica, colher informações e teorizar adequadamente nas situações mais diversas. (BASSANEZI, 2011, p. 205)

Diante disso, esclarecemos que a Aprendizagem Baseada em Problemas apresenta-se como algo a mais, porque além de se preocupar com as competências conceituais, no caso, direcionadas à Matemática, também se atém às competências ligadas às questões profissionais. Na Modelagem, por exemplo, qualquer situação encontrada na realidade pode ser utilizada e, no PBL, essas situações, necessariamente, precisam ser voltadas aos campos de atuação profissional dos universitários, salientando ainda sua abrangência transdisciplinar.

Além da Resolução de Problemas e da Modelagem Matemática, outras metodologias de ensino se assemelham ao PBL, entretanto não serão abordadas aqui devido ao foco dessa pesquisa.

Em experiências práticas, associadas à implantação do PBL em cursos de Engenharia, Ribeiro (2008a) destaca:

O PBL tão pouco é um mero conjunto de técnicas de solução de problemas; apesar de importantes, esta metodologia não pode ser reduzida a elas. Ao contrário, o PBL é uma metodologia de ensino e aprendizagem que utiliza problemas – coerentes para com a futura atuação dos alunos como profissionais e cidadãos – para iniciar, enfocar e motivar a aprendizagem dos conhecimentos conceituais, procedimentais, atitudinais objetivados. (RIBEIRO, 2008a, p. 24)

Entende-se que a Aprendizagem Baseada em Problemas não é a cura para todos os problemas de ensino e aprendizagem no Ensino Superior (RIBEIRO, 2008a), principalmente em relação a áreas que envolvem conhecimentos matemáticos. Consideramos que essa metodologia de ensino pressupõe riscos, possíveis vantagens e desvantagens. Ainda assim, do ponto de vista teórico, de acordo com o que foi exposto até aqui, acreditamos que a mesma pode favorecer os processos de ensino e aprendizagem de noções do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior.

No próximo capítulo apresentaremos alguns aspectos teóricos que ajudam a sustentar essa hipótese. Todavia, antes disso, faremos mais algumas considerações a respeito

de aspectos relacionados às metodologias de ensino aqui descritas. Realizamos uma breve síntese no quadro a seguir.

Aspectos	Metodologias
Situação apresentada (problema): clara, fechada e estruturada – operacional.	RP; MM
Situação apresentada (problema): aberta e pouco estruturada.	RP; MM; PBL
Construção e análise de modelos matemáticos.	MM; PBL
Dinâmica da aula: individual ou em grupos de alunos.	RP; MM; PBL
Formalização final, possivelmente realizada pelo professor.	RP; MM; PBL
Trabalho com o problema em grupos.	RP; MM; PBL
Trabalho com o problema de forma individual ou em grupos.	RP; MM
Estabelecimento de um plano e execução do mesmo já em etapas iniciais de análise do problema.	RP; MM; PBL
Processo de validação e modificação.	RP; MM; PBL
Trabalho em equipe e desenvolvimento de habilidades de cooperação, respeito mútuo.	RP; MM; PBL
Autoavaliação.	MM; PBL; RP
Apenas situações reais ou simuladas abordam conteúdos matemáticos.	MM; PBL
Compreensão do papel social e cultural da Matemática em diferentes contextos.	RP; MM; PBL
Trabalho com previsões de situações.	RP; MM; PBL
Buscam-se propostas de resolução para os problemas.	RP; MM; PBL
Utilização de conhecimentos prévios;	RP; MM; PBL
Há leitura, análise e discussão dos problemas apresentados (em grupos).	RP; MM; PBL
Relações interdisciplinares atenuadas pelas situações.	RP; MM; PBL
Apresentação do problema com intuito de focar e motivar os estudantes.	RP; MM; PBL
Alunos participam ativamente do processo de aprendizagem.	RP; MM; PBL
Procuram aliar conhecimentos teóricos com alguma situação prática.	RP; MM; PBL
Explora exclusivamente situações relacionadas à prática profissional.	PBL
Sessões de tutorias necessariamente com revezamento de papéis	PBL

Quadro 1 – Aspectos relacionados às metodologias de ensino.

Fonte: Elaborado pelo autor

Este quadro procura esclarecer que a opção pelo trabalho com a Aprendizagem Baseada em Problemas não se contrapõe a nenhuma das outras abordagens metodológicas mencionadas anteriormente. Embora haja algumas diferenças pontuais entre elas, percebemos o quanto há aspectos em comum.

Trabalhar com o PBL envolve a resolução de problemas, os modelos matemáticos, a interdisciplinaridade, a participação efetiva dos estudantes, etc., porém, acreditamos que a inserção de problemas ligados a assuntos profissionais abordados em sessões tutoriais, podem colaborar com uma formação pessoal e profissional mais ativa e construtiva.

CAPÍTULO 4

4 AS IDEIAS DE VYGOTSKY E O PBL

Julgamos relevante repensar relações entre teoria e prática no contexto universitário e gerar efetivas transformações educacionais. Sinalizamos a possibilidade de explorar, como metodologia de ensino, a Aprendizagem Baseada em Problemas. Neste capítulo apresentaremos de uma forma sucinta algumas relações entre esta metodologia e teorias de aprendizagem, em especial as ideias de Vygotsky.

Quando se propõe alguma aprendizagem, entende-se que são criados processos que induzem à construção de conhecimentos, sejam eles intelectuais ou sociais.

Para Vygotsky (2007, p. 92), “o aprendizado é mais do que a aquisição da capacidade de pensar; é a aquisição de muitas capacidades especializadas para pensar sobre várias coisas”. Isto significa que o objetivo não é meramente aprender por aprender, por memorizar, ou reproduzir determinados conhecimentos, mas almeja-se que as aprendizagens adquiridas sirvam para além dos ambientes educacionais.

Portanto, relações entre teoria e prática devem estar articuladas ao entendimento de qualidade educacional. Essa articulação envolve interações entre ensino, pesquisa e prática profissional. Além disso, a busca por essa qualidade está diretamente relacionada às concepções que o sistema exerce sobre o indivíduo, a aprendizagem e aos conhecimentos adquiridos (KLEIN; SOUZA, 2013).

As ideias de Levi Semenovitch Vygotsky (1978; 2005; 2007) e Marta Khol de Oliveira (1993) servem de embasamento teórico para nossos argumentos, já que almejamos a organização de atividades (envolvendo problemas reais ou realísticos), para abordar noções de Cálculo Diferencial e Integral por meio do PBL, articulando assim teoria e prática profissional.

Tais fundamentações se justificam pela proposição de estratégias de ensino e aprendizagem que incentivem o desenvolvimento de habilidades e competências de estudantes, sob uma perspectiva transdisciplinar. Afinal, essa transdisciplinaridade tem o intuito de despertar a consciência em prol da aquisição de conhecimento (D'AMBRÓSIO, 2011).

A formação universitária e científica precisa oferecer à sociedade, profissionais que estejam aptos a desenvolver de modo eficaz suas atividades cotidianas de trabalho, agregando a elas domínios conceitual, técnico, humano, político e crítico (HUNGER; LEPRE, 2013). A abordagem pautada na Aprendizagem Baseada em Problemas engloba essas características. A mesma adota “pressupostos construtivistas que atribuem a aprendizagem à ação do sujeito sobre os objetos de conhecimento, às suas experiências práticas e aos contextos de aprendizagem, estabelecendo-se uma relação dialógica entre sujeito-objeto” (KLEIN; SOUZA, 2013, p. 3).

Se há o intuito de promover ambientes de aprendizagem que instiguem o interesse dos estudantes, que promovam uma aproximação maior entre eles e seus objetos de estudo, de forma significativa, preparando esses indivíduos para uma melhor atuação profissional, faz-se necessário investigar metodologias de ensino e aprendizagem que propiciem o desenvolvimento de habilidades e competências relacionadas à determinada prática profissional.

Acreditamos que seja essencial conhecer os aspectos teóricos que amparam a adoção de uma metodologia como o PBL.

Entendemos que essa abordagem valoriza a construção de conhecimentos por meio das práticas educacionais e estabelece relações diretas entre aprendizado e desenvolvimento.

Segundo Oliveira,

É fundamental para a educação a ideia de que os processos de aprendizado movimentam os processos de desenvolvimento. O percurso do desenvolvimento humano se dá “de fora para dentro”, por meio da internalização de processos interpsicológicos. (OLIVEIRA, 1993, p. 105)

Isso tende a acontecer nas diferentes relações sociais nas quais os indivíduos se inserem. Essa perspectiva já era analisada por Vygotsky, em meados de 1978, e ele buscava compreender o desenvolvimento humano e sua formação com base nas relações de trabalho.

É o trabalho que, pela ação transformadora do homem sobre a natureza, une homem e natureza e cria a cultura é a história humanas. No trabalho desenvolve-se, por um lado, a atividade coletiva e,

portanto, as relações sociais, e, por outro lado, a criação e utilização de instrumentos. (OLIVEIRA, 1993, p. 28)

A proposta enunciada pelo PBL também tem preocupações como essas, visto que procura desenvolver habilidades que são desejáveis e necessárias em ambientes de cooperação, compreensão e tolerância entre os indivíduos (KLEIN; SOUZA, 2013).

Essa fundamentação construtivista retratada por Vygotsky “trabalha explícita e constantemente com a ideia de reconstrução, de reelaboração, por parte do indivíduo, dos significados que lhe são transmitidos pelo grupo cultural” (OLIVEIRA, 1993, p. 63).

Dessa forma, nessa proposta de pesquisa, o caráter realístico dos problemas apresentados e seu fim aberto, permitem que o estudante identifique suas necessidades de aprendizagens e reelabore seus conhecimentos, sempre que necessário; afinal, eles não são completos. Ao atuarem de forma coletiva, dispostos em grupos de estudos, mediados por um tutor, os indivíduos podem ter suas capacidades de desenvolvimento alavancadas pelos processos de aprendizado. Logo, em consonância com Vygotsky, é preciso propiciar processos cognitivos por meio da chamada Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que:

É a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou colaboração com companheiros mais capazes. (VYGOTSKY, 2007, p. 97)

Muitos conceitos relativos ao pensamento matemático avançado, não são bem compreendidos por parte dos estudantes. Normalmente são apresentados de modo expositivo, fragmentado e sem vínculos com temas ligados a questões profissionais. Sendo assim, criar situações de aprendizagens que promovam uma visão diferenciada a respeito deste quadro pode favorecer tanto o ensino quanto o aprendizagem.

Em várias ocasiões, o estudante se depara com propostas que consegue resolver de forma independente e possui em mãos todos os elementos necessários para a elaboração de suas possíveis soluções. No entanto, nem sempre isso irá ocorrer, e ele precisa perceber que possui potencial para propor resoluções coerentes, ainda que as mesmas pareçam estar distantes de suas capacidades reais. Por meio de discussões em grupos e de mediações dadas de forma direcionada, este sujeito pode

perceber o quanto seu objeto de estudo está atrelado às suas zonas de conhecimentos. Isso porque:

A teoria de Vygotsky sugere que, por lhe ser possibilitado interagir a um nível mais elevado, o aprendiz interiorizará, sempre por meio da interação, os processos, conhecimentos e valores que usa, quer seja capaz, ou não, de os identificar no instante em que os usa. (FINO, 2001, p. 8)

Ainda, na visão deste autor, tanto a interiorização quanto o desenvolvimento de habilidades, possibilitam que o aprendiz esteja habilitado a iniciar um novo ciclo de aprendizagem a um nível cognitivo mais elevado. O sujeito precisa se conscientizar sobre o quão importante é o seu aprendizado.

O propósito em ressignificar aprendizagens na área de Cálculo ressalta-se justamente nesse ponto. Adquirindo tal consciência, o aprendiz se reconhece nas situações e percebe o quanto as mesmas são importantes. Nesse sentido,

Um dos pontos essenciais pertinentes à percepção humana é a percepção de objetos reais [...]. Por esse termo eu entendo que o mundo não é visto simplesmente com cor e forma, mas também como um mundo com sentido e significado. (VYGOTSKY, 2007, p. 24)

Isso nos leva a considerar que os aspectos ligados aos conhecimentos matemáticos, necessariamente, não podem ser explorados de uma forma isolada, sem relação com outros campos de conhecimento. A estratégia em se adotar problemas no formato do PBL, os quais assumem o papel de “objetos reais” tem o intuito de promover percepções diferenciadas. Tais problemas, que têm características reais ou realísticas, podem gerar mais significado à aprendizagem, logo, outras habilidades e competências podem ser contempladas. Os alunos passam a serem construtores de seus conhecimentos por meio do trabalho com outras pessoas, da pesquisa e da busca por novos conhecimentos.

Com isso, o “processo simples de estímulo-resposta é substituído por um ato complexo” (VYGOTSKY, 2007, p. 33). Ou seja, nesse processo todo serão inseridos estímulos secundários. As informações para a resolução dos problemas não deverão ser fornecidas aos estudantes, mas estes, em uma abordagem diferenciada, terão que buscar estratégias de resoluções que não usavam anteriormente. Esses estímulos de segunda ordem representam um elo entre o estímulo inicial e a resposta dada e também faz com que o indivíduo realmente se engaje no estabelecimento desse elo.

As etapas de discussões e trabalhos em grupos são favoráveis ao processo de aprendizagem e, conseqüentemente, ao desenvolvimento de cada indivíduo. A partir delas, são explorados conhecimentos prévios e, por meio de sua linguagem e de outros recursos ligados à comunicação, os estudantes não partem para o processo de resolução em si. Neste caso, o PBL permite que a manipulação direta seja “substituída por um processo psicológico complexo através do qual a motivação interior e as intenções, postergadas no tempo, estimulam o seu próprio desenvolvimento e realização” (VYGOTSKY, 2007, p. 14).

A apresentação de situações ligadas aos possíveis campos profissionais desses alunos, entrelaçando tópicos de CDI e sendo mediadas por um tutor, podem funcionar como um importante instrumento propício à criação de uma Zona de Desenvolvimento Proximal. Segundo Vygotsky é a ZDP que:

Define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções estas que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário [...] poderiam ser chamados de “brotos” ou “flores” do desenvolvimento, em vez de “frutos” do desenvolvimento. (VYGOTSKY, 2007, p. 98)

A metodologia de ensino PBL, segundo pesquisas acadêmicas já citadas, contribui significativamente para esse processo de maturação dos conhecimentos e desenvolvimento dos indivíduos.

Isso nos leva diretamente a um reexame do problema de disciplina formal, ou seja, o significado de cada assunto em particular do ponto de vista do desenvolvimento mental global. Claramente, o problema não pode ser resolvido utilizando qualquer uma fórmula; é necessária pesquisa concreta, extensa e altamente diversificada baseada no conceito de ZDP para resolver o problema. (VYGOTSKY, 1978, p. 35)

Daí a relevância do papel do tutor nesse momento. Suas contribuições em meio a todas essas considerações são primordiais. É essa figura que irá mediar o processo de ensino e aprendizagem. Nas palavras de Oliveira (1993), a mediação é um ponto central para o entendimento das ideias de Vygotsky e, essa aproximação, entre sujeito e objeto, ou seja, entre teoria e prática, se dá por meio do sistema de tutorias na Aprendizagem Baseada em Problemas.

O professor tem o papel explícito de interferir na ZDP dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente [...]. Os procedimentos regulares que ocorrem na escola – demonstração,

assistência, fornecimento de pistas, instruções – são fundamentais na promoção do “bom ensino”. (OLIVEIRA, 1993, p. 63)

Em analogia à realização dos experimentos de Vygotsky e seus colaboradores, defende-se que o professor deve agir ativamente nos processos de aprendizagem.

No sentido de desafiar o sujeito, de questionar suas respostas, para observar como a interferência de outra pessoa afeta seu desempenho e, sobretudo, para observar seus processos psicológicos em transformação e não apenas os resultados de seu desempenho. (OLIVEIRA, 1993, p. 65)

Nesta proposta de pesquisa, aliar conhecimentos teóricos com práticas, ainda mais questões que envolvem práticas profissionais, não se pauta simplesmente em preocupações com os resultados finais, ligados ou não a uma resposta correta. Propõe-se que a formação de alguns conceitos ligados ao CDI seja desenvolvida sob uma perspectiva de uma aprendizagem ativa. Aliás, conforme Vygotsky (2005), esse processo de formação de conceitos é algo criativo, que não pode ser interpretado como algo mecânico e passivo, é uma base realmente construtivista.

As considerações mencionadas neste capítulo levaram-nos a construção da ilustração a seguir. Através dela destacamos aspectos processuais envolvidos nas relações entre CDI e o PBL, amparados nas ideias de Vygotsky.

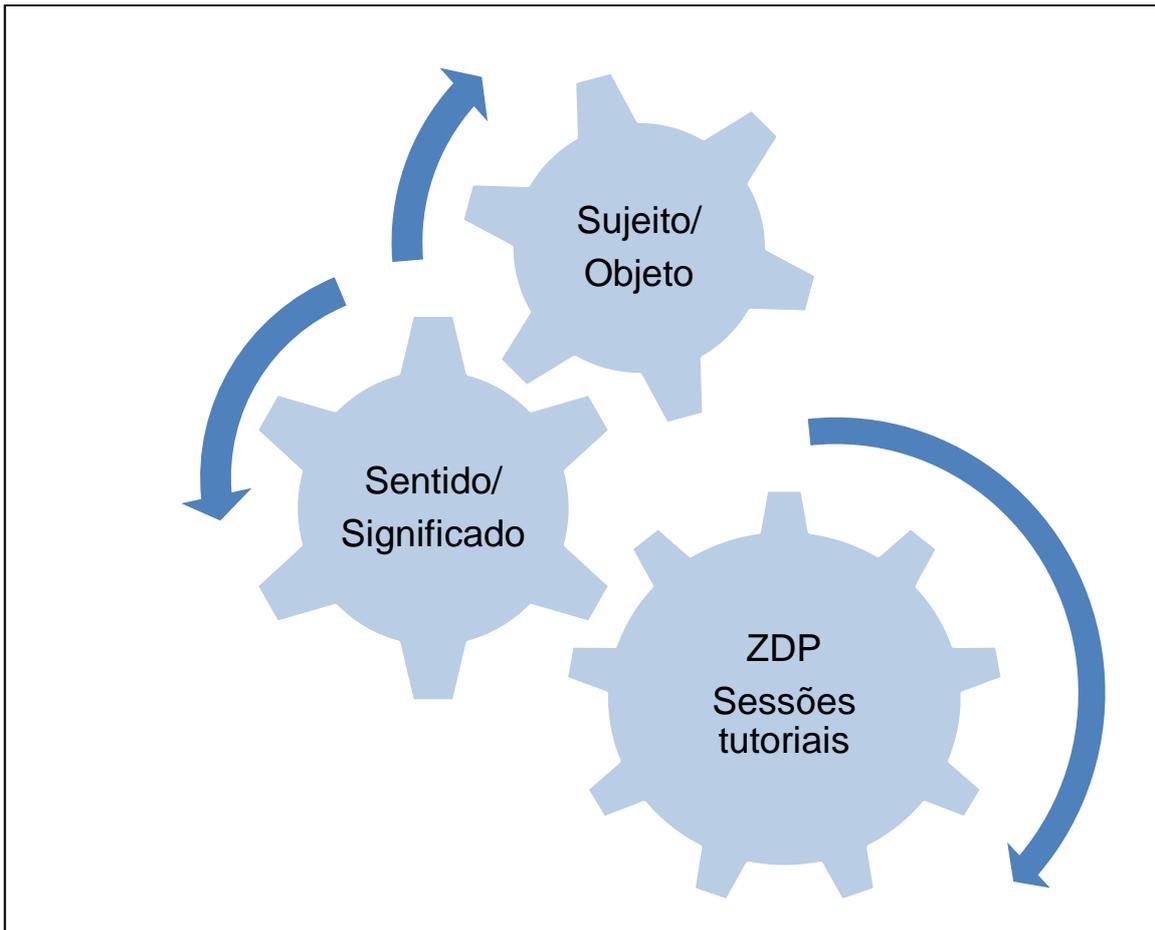


Figura 1 – Aspectos processuais do PBL embasados em teorias de Vygotsky.
Fonte: Elaborado pelo autor

No próximo capítulo apresentamos quatro atividades que exemplificam o uso de noções de Cálculo Diferencial e Integral, por meio da Aprendizagem Baseada em Problemas. Sequencialmente, serão apresentadas considerações didáticas para cada proposta sugerida, explorando alguns objetivos, conhecimentos prévios necessários aos alunos, orientações aos professores e sugestões de dinâmicas nas sessões de tutorias.

CAPÍTULO 5

5 SUGESTÕES DE PROBLEMAS E ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS DE ACORDO COM O PBL

Com base nas considerações tecidas nos capítulos anteriores, desenvolvemos (ou melhor, adaptamos) problemas contextualizados, reais ou realísticas, associados a possíveis atuações profissionais de estudantes (de determinados cursos de graduação). Esses problemas foram estruturados no formato do PBL, contemplando noções de Cálculo Diferencial e Integral.

Nossas considerações em relação à dinâmica da sala de aula num contexto PBL, baseiam-se nas ideias de Ribeiro (2008b) e Araújo e Arantes (2009). Buscamos apresentar apenas uma sugestão para docentes de como iniciar uma abordagem por meio do PBL.

Consideramos fundamental a conscientização acerca dos objetivos da metodologia e do trabalho a ser feito. Os alunos precisam entender que todo processo se dá por meio de tutorias e possíveis consultorias, as quais substituem as aulas tidas como tradicionais, proporcionando um ambiente mais dinâmico e interativo.

Para tanto, os alunos deverão ser organizados em pequenos grupos, em torno de quatro ou cinco pessoas (recomenda-se que no PBL, os grupos não sejam formados com mais de oito alunos, para não comprometer a eficácia do processo).

Desde o início cada grupo deve eleger um coordenador e um relator (ou secretário). O coordenador tem a responsabilidade de conduzir as conversas em grupo – atua como líder da equipe. Já o relator tem a função de registrar os pontos mais importantes das reuniões, além de pontuar quais serão as tarefas de cada membro antes dos próximos encontros. É preciso que haja rotatividade de papéis entre os participantes do grupo, a fim de trabalhar atitudes e comportamentos essenciais às atuações profissionais, além de evitar a monopolização de alguns e descompromisso de outros.

Alguns aspectos gerais também precisam ser esclarecidos. Existem três aspectos que são elementares em uma dinâmica de trabalho com o PBL. São elas: a análise do problema e o planejamento da pesquisa; o desenvolvimento das ações que levarão à

resolução do problema; a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios (ARAÚJO; ARANTES, 2009). Vejamos:

- Análise do problema e planejamento da pesquisa

Nessa fase é necessário apresentar aos alunos uma visão geral sobre a situação que eles têm em mãos e o quanto a mesma está próxima de suas futuras realidades profissionais, isso se dá por meio da leitura coletiva do problema, apresentação do contexto e registro de possíveis palavras ou termos desconhecidos, esses deverão ser pesquisados posteriormente. O interesse pelo problema deve ser despertado e os grupos tendem a perceber que há lacunas em seus conhecimentos, logo, faz-se necessária a realização de pesquisas acerca do assunto abordado.

Parte-se, então, para a execução de um mapeamento e busca de informações sobre o problema: surgem organizações de ações e trocas de experiências entre os membros da equipe. Destacamos, também, que nessa etapa, deverá surgir a elaboração de hipóteses e definições das estratégias para responder ao problema, considerando o tempo disponível para executá-las, esse tempo depende da carga horária da disciplina e do planejamento do tutor (professor). Pode-se sugerir também que os grupos elaborem um projeto (de pesquisa), dependendo das intencionalidades do tutor das aulas.

- Ações que levarão à resolução do problema

Nessa etapa ocorre o desenvolvimento de estudos, pesquisas e intervenções em favor do problema, contando com possíveis consultorias de outros profissionais (ou professores). Nas análises que serão realizadas em momentos posteriores, descreveremos mais detalhadamente como essa fase poderá ocorrer.

A dinâmica do plano de aulas no formato PBL dificilmente se restringe a um único momento. Após o primeiro contato com o problema, no qual surgirão indagações, hipóteses e alguns planos de ação, os discentes precisam se reencontrar a fim de apresentar e discutir tudo o que foi desenvolvido (o que pode ter sido feito ao longo de uma semana, por exemplo). De posse de seus materiais de estudos, ou seja, com as pesquisas realizadas, os grupos falam sobre suas descobertas e, com

embasamentos teóricos, compartilham suas informações com os outros membros da equipe.

O tutor, realizando suas orientações, analisa as interpretações dos alunos e possibilita encaminhamentos a respeito do trabalho com conceitos envolvidos, mesmo que englobe outras áreas de conhecimento. Todavia, esse tutor precisa analisar se a escolha das variáveis, das decisões adotadas pelos alunos não irá levar à construção de conhecimentos incompatíveis. Previsões e análises das dificuldades também devem ser uma das preocupações desse facilitador, tanto em relação aos conhecimentos gerais como ao comportamento que cada grupo possa apresentar.

Reiteramos que cada um desses apontamentos, analisados de modo processual, pretendem diagnosticar a aquisição de conhecimentos transdisciplinares e, precisam, assim, ser bem estruturados.

- Socialização dos conhecimentos produzidos e produção de relatórios

Essa será a última etapa do trabalho com problemas no formato PBL. Essa socialização se dá por meio do compartilhamento dos conhecimentos produzidos, com os demais grupos e com o tutor envolvido. Propõe-se a apresentação de um relatório acadêmico-científico, no qual conste a trajetória do projeto desenvolvido, as pesquisas realizadas e os resultados obtidos ao final da proposta.

Importante destacar também sugestões a respeito do processo de avaliação dessas aulas. Como pesquisadores, evidenciamos que há preocupações tanto em relação à avaliação processual quanto à avaliação formativa, reiterando que nossa proposta PBL busca abarcar competências conceituais, atitudinais e procedimentais.

Araújo e Arantes (2009) sugerem como avaliações a produção e análise de relatórios, uma nota seria atribuída a um relatório científico parcial e a outra faria referência ao relatório científico final. Realizada uma média entre ambas, tem-se, então, a média final de cada estudante. Segundo esses autores, para que esses relatórios sejam elaborados, cada um deles deve compor as avaliações de todos os envolvidos no processo. Ou seja, no relatório parcial, deve constar a avaliação do tutor, a autoavaliação do estudante e a avaliação que o grupo faz de cada membro da equipe. Associadas a essas análises também irão constar as notas dadas à produção do

relatório científico em si e à apresentação feita durante os seminários, é importante considerar na avaliação a postura e participação dos estudantes na tutoria. Lembrando que para cada item apresentado pode-se atribuir ponderações diferentes.

Como pretendemos abordar tópicos matemáticos nessas propostas de ensino, pode-se atribuir também notas voltadas a parte de compreensão/aplicação de conceitos. Na verdade, tudo isso irá depender dos critérios avaliativos a serem adotados pelo tutor, mediante sua própria experiência como docente.

Os conhecimentos adquiridos são pontuados pelos próprios estudantes. E o tutor ao longo do projeto tende a identificar se os novos conhecimentos realmente estão sendo construídos. Ou seja, os métodos de resolução a serem adotados, bem como os conceitos matemáticos trabalhados, vão sendo institucionalizados durante os encontros, e no final, há uma formalização geral dos trabalhos e estudos desenvolvidos. Devolutivas e discussões entre os membros do grupo e o tutor devem ser feitas no desenrolar do processo e também após a concretização do mesmo. Realiza-se a etapa de validação das soluções, momento este em que há abertura para a exposição das ideias e troca de experiências com os outros grupos e, na sequência, ocorrerem as avaliações gerais. A ideia é que esses estudantes notem o quanto a apreensão do problema pode colaborar para o desenvolvimento de suas competências conceituais, atitudinais e comportamentais.

A seguir realizaremos algumas considerações mais específicas, segundo as características de cada atividade elaborada.

5.1. Problema 1 – Água mineral contaminada



Figura 2 – Água mineral.

Fonte: Retirado de <http://franquiaempresa.com/>

Com a escassez de água no Estado de São Paulo, a demanda de uma Companhia de Água Mineral aumentou muito. A demanda foi tão grande que o gerente precisou adquirir 10 milhões de litros de água de outro fornecedor.

Infelizmente, houve a desconfiança de que a água que ele comprou estava contaminada pela bactéria *Pseudomonas aeruginosa*. De que forma essa desconfiança poderia ser confirmada ou refutada?

Suponha que adotando uma das formas que você indicou para a verificação da contaminação na água, a desconfiança foi confirmada, a água realmente está contaminada por *Pseudomonas aeruginosa*, indicando uma quantidade de 13 UFC/100ml.

Qual é a quantidade de *Pseudomonas aeruginosa* para que a água seja considerada imprópria para o consumo?

Se você fosse o gerente dessa Companhia, o que você faria para não ter prejuízo e não perder toda a água adquirida?

Orientações Didáticas

Seguem abaixo algumas questões subjacentes que poderão complementar o planejamento para a resolução ou encaminhamento do problema. Caso essas

questões não sejam propostas pelos estudantes (organizados em grupo) elas poderão ser feitas pelo tutor. Inicialmente será fundamental indicar as palavras ou termos desconhecidos pelos integrantes do grupo para iniciar a pesquisa.

- Existe alguma diferença entre água contaminada e água poluída?
- As bactérias *pseudomonas aeruginosa* podem causar que tipo de prejuízos à saúde?
- Qual é a taxa de proliferação da população desse tipo de bactéria?
- Qual é o limite tolerável para que esse tipo de bactérias não cause prejuízos à saúde?
- Como pode ocorrer a contaminação por tais tipos de bactérias? Como se faz a análise para verificar a qualidade da água? Quais são as exigências das agências nacionais como o Ministério da Saúde, em relação à água mineral.

Uma sugestão para uma possível solução desse problema é desenvolver um modelo matemático para representar a situação e verificar qual quantidade de água mineral (não contaminada) seria necessária acrescentar aos 10 milhões de litros para que a contaminação atinja um nível de concentração que não prejudique a saúde humana.

Poderiam ser explorados modelos baseados em funções afim, exponenciais, ou funções com várias sentenças, considerando a taxa de variação desses tipos de funções. A escolha por um determinado modelo poderá considerar dados de pesquisas científicas (artigos publicados) sobre a taxa de crescimento desse tipo de bactérias em água mineral³.

O tutor deverá ficar atento aos encaminhamentos dos alunos, pode ser que eles proponham soluções sem considerar conceitos matemáticos, caso isso ocorra, o tutor poderá ressaltar também a importância do tratamento matemático da questão, por meio de questões, por exemplo, qual é a taxa de variação do crescimento da população desse tipo de bactérias em função do tempo? Poderá ressaltar ainda que o uso de um modelo poderá auxiliar na tomada de decisão em relação ao problema

³ O artigo intitulado "Variação da microbiota natural e de *pseudomonas aeruginosa* em água mineral não carbonatada embalada em diferentes materiais durante o armazenamento a 30°C ± 1°C" pode ser bastante útil no desenvolvimento do estudo. (Disponível em <<http://dx.doi.org/10.1590/S0101-20611997000200019>>. Acesso em: 02 jan. 2016).

proposto, com previsões ou simulações. Também poderá sugerir o estudo de modelos existentes para o crescimento populacional de bactérias, ressaltando sua importância e limitações perante a situação real.

Esse problema envolve conhecimentos relacionados às áreas de Biologia, Química, Matemática, Medicina, Economia, entre outras, dependendo do tipo de solução que será proposto pelos grupos, após pesquisas e estudos complementares.

5.2. Problema 2 – Impactos ambientais causados por poluentes químicos



Figura 3 – Incêndios em tanques de combustível.
Fonte: Retirado de <http://odia.ig.com.br/>

O incêndio que teve início em um dos tanques de combustível de uma indústria, no bairro do Alemoa, cidade litorânea de São Paulo, que gerou diversas explosões em outros tanques causou diversos prejuízos naturais. Os impactos ambientais do incêndio que atingiu seis tanques poderão durar vários anos, contaminando as águas, manguezais, plantas e animais.

Além disso, com a emissão de poluentes na atmosfera, existe a possibilidade de ocorrência de chuvas ácidas, o que comprometeria a vegetação da serra do Mar. Estima-se que bilhões de litros de água que foram usados no resfriamento dos tanques voltaram para o ecossistema aquático com resíduos do combustível e dos produtos químicos que compõem a espuma usada para debelar o fogo.

De acordo com a Companhia Ambiental do Estado (Cetesb), na época do incêndio a quantidade de oxigênio disponível na água foi reduzida dramaticamente e a temperatura subiu 7°C acima do tolerável para os peixes, o que causou a morte de oito toneladas deles.

Realize uma pesquisa para indicar os impactos ambientais causados pelo incêndio relatado no início, e busque desenvolver um modelo matemático para fazer previsões sobre o tempo que será necessário para que os impactos sejam recuperados.

Estudo de apoio para o problema 2⁴

Para incentivar os estudos dos impactos ambientais causados pelo incêndio descrito na situação anterior, e indicar algumas informações e dados que serão necessários para iniciar tais estudos, vamos propor a análise e resolução do caso de uma Petroquímica que poluiu uma Baía:

A Petroquímica Ltda., companhia especializada no tratamento de resíduos poluentes derramou, acidentalmente, uma grande quantidade do Agente Oleoso na Baía Bonita. Feitas medições após o acidente, concluiu-se que a concentração do Agente Oleoso nas águas da baía era de 10 ppm (partes por milhão).

Na baía existem manguezais que, por sua flora e fauna características, são considerados zonas de proteção ambiental. Infelizmente, não é possível remover por meios mecânicos o Agente Oleoso que polui os manguezais: corre-se o risco de causar danos ainda maiores ao ecossistema local.

Além disso, a pesca na baía constitui o único meio de sobrevivência para diversas colônias de pescadores que vivem ao seu redor. Devido à contaminação dos peixes pelo Agente Oleoso, a pesca na baía foi proibida.

Numa tentativa de ressarcir, em parte, os danos causados ao meio ambiente e o prejuízo sofrido pelos pescadores, moveu-se uma ação popular contra a Petroquímica para o estabelecimento de uma multa a ser investida em Programas de Despoluição da baía e em auxílio às famílias desempregadas.

Após uma cuidadosa análise da situação, cientistas ambientalistas, garantiram que a baía tem uma capacidade de se autodepurar a uma taxa de 20% ao ano. Baseando-se nesta hipótese, estabeleceram, então, o seguinte modelo matemático para a concentração do Agente Oleoso ao longo do tempo:

⁴ Esse estudo de apoio foi inspirado e adaptado do capítulo 6 do livro *Aprendendo Cálculo com Maple*, de Angela Rocha dos Santos e Waldecir Bianchini. Ano: 2002. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo1/calculo1pdf/capitulo_06.pdf>. Acesso em: 12 maio 2015.

$$p(1) = 10$$

$$p(n+1) = 0,8p(n)$$

(Este é um exemplo de um sistema dinâmico discreto)

Utilize este modelo, para fazer as seguintes previsões indicadas no quadro abaixo:

Ano	Poluente (ppm)						
1		6		11		16	
2		7		12		17	
3		8		13		18	
4		9		14		19	
5		10		15		20	

Quadro 2 – Previsão do total de poluentes ao longo dos anos.
Fonte: Adaptado do livro Aprendendo Cálculo com Maple

A partir dos dados indicados no quadro anterior, construa um gráfico para indicar as previsões calculadas por você:

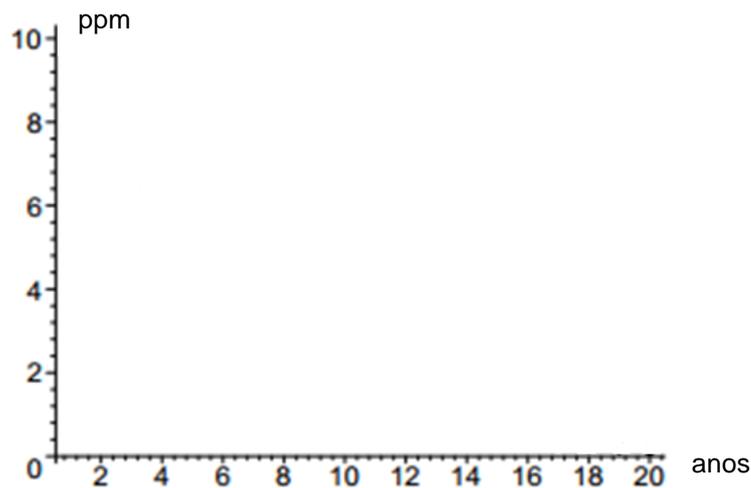


Figura 4 – Gráfico relacionado às previsões (poluentes x anos).
Fonte: Adaptada do livro Aprendendo Cálculo com Maple

Suponha que de posse destes dados, os advogados da Petroquímica, em defesa do seu cliente, alegaram junto ao tribunal que não houve um dano real ao meio ambiente provocado pelo derramamento do Agente Oleoso na baía, porque ao final de algum tempo o nível de poluição da baía retornaria ao seu padrão inicial. Para fundamentar esta linha de argumentação, usaram a fórmula $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 0$, explicando que esta

fórmula traduzia em termos matemáticos precisos o que aconteceria com a concentração do Agente Oleoso ao longo do tempo. Além disso, explicaram também que a fórmula acima significa, matematicamente, que após um certo tempo a concentração do Agente Oleoso ficará muito próxima de zero.

O promotor da ação achou que havia alguma coisa errada nesta história, “justificada matematicamente”, mas não sabia como contestar os argumentos matemáticos apresentados. Uma de suas assistentes chamou atenção para o verdadeiro significado matemático da expressão $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 0$.

A assistente argumentou que, embora depois de muitos anos a concentração do Agente Oleoso realmente se aproximaria de zero, os peixes e o restante da fauna e da flora aquáticas estariam contaminados e impróprios para o consumo. Por este motivo a pesca na baía seria proibida até que a concentração do Agente Oleoso fique abaixo de 2 ppm.

Para fundamentar seu raciocínio apresentou o seguinte gráfico, ilustrativo da situação descrita:

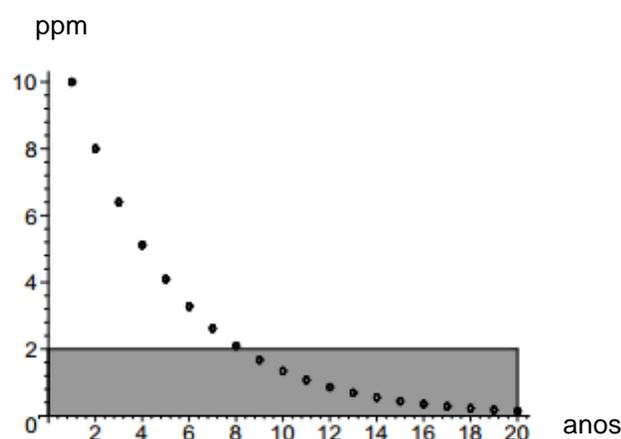


Figura 5 – Previsão da concentração de poluentes ao longo dos anos.
Fonte: Retirado do livro Aprendendo Cálculo com Maple

Assim, pelos dados apresentados pelos ambientalistas e pelo gráfico acima, ela concluiu que transcorreriam oito longos anos até que a baía pudesse ser liberada para a pesca. Propôs, então que fosse cobrada da Petroquímica uma multa de 10 milhões de reais por cada ano em que a pesca estivesse proibida. Pelos dados apresentados, a multa total devida seria de 80 milhões de reais.

Além disso, a assistente da promotoria afirmou que a interpretação matemática dada pelos advogados da Petroquímica estava correta, mas era apenas uma pequena parte da história. O significado mais preciso da expressão $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 0$ é que para qualquer nível de concentração C do Agente Oleoso haverá um tempo T , que pode estar muito, muito longe no futuro, tal que para todo $t \geq T$, isto é, para qualquer tempo posterior, teremos que $|p(n)| < C$.

Dessa maneira, para que a pesca pudesse ser liberada teríamos que ter $C = 2$ ppm e, neste caso, $T = 9$ anos.

O promotor então argumentou que, embora o nível de 2 ppm fosse adequado para a liberação da pesca na baía, a fauna e a flora, especialmente dos manguezais, só se recuperariam completamente quando o nível de concentração do Agente Oleoso ficasse abaixo de 0,5 ppm e apresentou o gráfico a seguir:

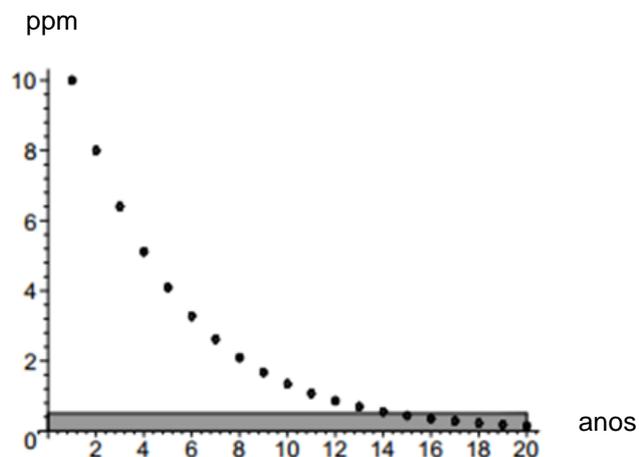


Figura 6 – Nível de concentração do Agente Oleoso no decorrer dos anos.
Fonte: Retirado do livro Aprendendo Cálculo com Maple

Concluindo, então, que este nível só seria atingido quando $t \geq 14$.

Tendo em vista os argumentos apresentados por ambas as partes, o juiz condenou a Petroquímica a pagar uma multa de 140 milhões de reais.

É possível determinar quanto tempo deve-se esperar até que a concentração de poluentes fique abaixo do nível indicado, nos seguintes casos? Em caso afirmativo determine quanto tempo será necessário, em caso negativo justifique.

(a) A concentração atual é de 15 ppm e cai a uma taxa de 30% ao ano. O nível tolerável de poluição é de 0,5 ppm.

(b) A concentração atual é de 15 ppm e cai a uma taxa de 10% ao ano. O nível tolerável de poluição é de 0,1 ppm.

No julgamento acima, apesar de todos os interessados terem concordado com a multa estipulada, muitos especialistas discordaram do nível aceitável de poluição. Para cada um dos especialistas consultados este nível seria de:

- ✓ Para o Especialista A o nível aceitável de poluição é de 12 ppm;
- ✓ Para o Especialista E o nível aceitável de poluição é de 3 ppm;
- ✓ Para o Especialista Q o nível aceitável de poluição é de: 1 ppm;

Qual seria o valor da multa que a Petroquímica deveria pagar levando em conta a opinião de cada um dos especialistas consultados?

Em geral, qual é o nível de poluição aceitável para que seja permitido o contato da água com o corpo humano, por exemplo, para banhar-se?

Ainda em relação ao julgamento, os advogados da Petroquímica apelaram da sentença alegando que a baía já apresentava um nível de poluição antes do derramamento do Agente Oleoso. Supondo que a concentração de agentes poluidores na baía é normalmente de 0,1 ppm, os ambientalistas obtiveram o seguinte modelo matemático para prever a concentração de poluentes ao longo do tempo:

$$p(1) = 10$$

$$p(n + 1) = 0,1 + 0,8(p(n) - 0,1)$$

Este modelo, em vez de levar em conta a quantidade de poluição da baía, estima a diferença entre o nível de poluição atual e o nível de poluição natural 0,1. Em outras palavras, se o nível aceitável é C, a Petroquímica será multada por cada ano no qual $|p(n) - 0,1| \geq C$. Levando em conta este modelo, determine por quantos anos a Petroquímica deverá ser multada se o nível tolerado é de 0,05 ppm.

Orientações Didáticas

No primeiro momento, o tutor poderá retomar algumas considerações a respeito da dinâmica das aulas. O mesmo deve esclarecer que a abordagem PBL será direcionada para trabalhar diversos conceitos além dos matemáticos.

Neste problema há questões associadas à área ambiental, ao entendimento de reações químicas elementares, a problemáticas ligadas à economia, ética, dentre outras. Devem-se promover momentos para análises e reflexões acerca do problema.

O problema é apresentado a cada grupo. Recomenda-se a leitura compartilhada. Mediante a compreensão dos estudantes, o tutor começa a realizar suas inferências, com a intenção de que as primeiras questões de aprendizagem sejam identificadas, solicitando também que indiquem palavras ou termos desconhecidos pelos integrantes dos grupos.

Indagações como: Quais os apontamentos mais relevantes nesse problema? Que conhecimentos o grupo acredita que estejam envolvidos nessa situação? Todas as informações pertinentes aos conteúdos matemáticos foram dadas? Quais dimensões além do campo matemático esse problema possui? Que tipo de ligações existe com as questões profissionais? Que estratégias o grupo pode usar para propor alguma resolução? etc.

Essa fase é crucial na proposta PBL, pois os alunos são confrontados com uma situação nova. Por meio das primeiras discussões realizadas, dos conflitos gerados a partir dessa situação, juntamente com os questionamentos do tutor e dos membros do próprio grupo, desequilíbrios cognitivos podem surgir, e então é necessário analisar que conhecimentos já existem a respeito dessa situação. Ou seja, trabalha-se com um levantamento de informações prévias e com a identificação de questões de aprendizagem (de ordem conceitual, social e psicológica).

A partir dessa primeira mediação, o tutor pode listar quais são os conhecimentos já adquiridos por esses alunos e como os mesmos interagem entre si. Logo, serão realizadas orientações a respeito das indagações. Dessa forma, há como identificar quais variáveis são elementares no problema e quais provavelmente serão adotadas para que estudos complementares possam contribuir para sua resolução.

Explicações iniciais realizadas pelos grupos são interpretadas como hipóteses. E estas, por sua vez, precisam ser investigadas. Assim, estudos referentes ao problema precisam ser aprofundados. As primeiras ideias envolvendo planos de ação começam a aparecer: Quais conhecimentos são necessários para que o problema seja resolvido? A respeito das questões ambientais, jurídicas, éticas, que aspectos precisam ser inevitavelmente considerados? O que vocês acreditam que está implícito nessa situação?

Na proposta PBL, é necessário ter uma visão holística a respeito da análise e interpretação do problema. Os grupos devem, então, estabelecer suas prioridades de estudos e seus objetivos de aprendizagem, pois afinal, nesta metodologia de ensino, espera-se que os próprios estudantes mobilizem seus conhecimentos.

Todo esse processo envolve a mediação do tutor. Após a delegação de tarefas, em parcerias ou de forma individual, e com o apontamento de alguns planos de ação, pode-se propor a realização de um relatório do encontro ao final dessa reunião.

O problema em questão envolve noções de Limites. Como sugestão de trabalho, o tutor pode propor referências bibliográficas a respeito do assunto; incentivar as relações de ajuda mútua para compreender conceitos; fornecer outros materiais de estudo complementares; disponibilizar espaços para que os estudantes aprofundem seus conhecimentos (bibliotecas, salas de monitoria, plantão de dúvidas), entre outras formas de estudo. Durante a dinâmica do PBL, o tutor pode também realizar encontros com uma característica mais expositiva a respeito dos principais conceitos, sem infringir a autonomia dos estudantes.

Ao trazer para discussão algo sobre limite, como a compreensão da expressão $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 0$, por exemplo, os alunos precisarão ter em mãos os recursos e pesquisas que realizaram sobre o assunto. O intuito é que, de modo autônomo, os estudantes mobilizem seus conhecimentos, verificando o que compreenderam, identificando suas concepções sobre o assunto. Seus registros e análises realizadas devem ser amplamente discutidos.

Esse é o momento para que se aborde a importância da Matemática aplicada a situações realísticas; que se evidencie o quanto certos conhecimentos são relevantes.

No problema em questão é possível identificar conhecimentos prévios a respeito da análise de tabelas e gráficos, e suas interpretações sobre o comportamento das funções dadas.

Como questionador e provocador, o tutor poderá retomar o problema e os gráficos construídos, permitindo que os alunos percebam o que acontece com a concentração de poluentes à medida que os anos se passam. Para isso, sugerimos alguns questionamentos: O que significa a afirmação “Após um certo tempo a concentração do Agente Oleoso ficará muito próxima de zero”? Como esta frase se relaciona com os gráficos? É verdadeira a ideia de que os valores da concentração de poluentes irão zerar em algum momento? Matematicamente, como isso pode ou não ser refutado?

A fim de discutir a definição matemática sobre limites, o tutor pode também explorar graficamente a definição desse conceito, fazendo-o de forma coletiva, o com o intuito de clarificar possíveis incompreensões iniciais.

Com essa etapa de esclarecimentos e discussões, novos estudos devem ser encaminhados. Surgem rediscussões entre os participantes e busca-se integrar as ideias matemáticas ao problema dado. Após os estudos necessários e indicados (o que pode se concretizar ao longo de vários encontros, dependendo da ênfase dada ao problema, das orientações fornecidas pelo tutor, do cronograma e da flexibilidade das aulas, do trabalho e interpretação dos membros da equipe, dentre outros fatores), os estudantes devem apresentar quais as propostas de soluções para o problema analisado.

Essa fase pode ser feita mediante sugestões de soluções apresentadas ao tutor, a partir de suas mediações em cada grupo. Consequentemente, as estratégias de resolução e desenvolvimento de todo percurso, podem ser apresentadas à turma de modo geral – com a adoção de recursos audiovisuais, exposição de trabalhos/projetos, explanação dos modelos projetados. Os discentes têm a oportunidade de rever suas considerações e de analisar os argumentos utilizados para defendê-las. Há uma formulação geral a respeito dos conceitos matemáticos envolvidos e das propostas de soluções para o problema dado. Logo, faz-se necessário validá-las.

Com os questionamentos dos demais integrantes da sala e apontamentos feitos pelo tutor, e outros integrantes do processo de avaliação (professores de outras áreas, por exemplo), é possível verificar a viabilidade das soluções apresentadas. Modificações podem ser realizadas, caso haja necessidade. E, com isso, ocorrem os processos de avaliações, descritos anteriormente. Para que isso seja ainda mais eficaz, o tutor deve oportunizar aos estudantes uma participação efetiva, de modo que percebam suas atuações ao longo do processo, seu desempenho, seu compromisso com a equipe, evolução ao longo da dinâmica, dentre outras observações.

A adoção e adaptação do problema abordado tem como objetivo colaborar com a formação de profissionais que de alguma forma atuem em questões relacionadas ao meio ambiente. Sendo este o caso, esse profissional precisa estar dotado de uma base sólida de conhecimentos teóricos e práticos ligados a diferentes áreas, como Matemática, Física, Química e Biologia, contemplando também uma visão crítica e global de aspectos políticos, econômicos, sociais e culturais.

5.3. Problema 3 – Projetando embalagens em forma cilíndrica⁵

Diversas indústrias de produtos alimentícios utilizam embalagens de lata em formato cilíndrico para comercializar seus produtos.

A produção de latas (que são utilizadas para armazenar ervilhas, extrato de tomate, óleo de soja, leite condensado, leite em pó, etc.) busca adotar técnicas para obter algumas otimizações, por exemplo, minimizar as perdas de materiais, de custos e atrasos ou maximizar os lucros. Diante de tais necessidades, surgem certas indagações:



Figura 7 – Alimentos dentro de latas.
Fonte: <http://nutriatualidades.blogspot.com.br>

Como cortar a matéria-prima, no caso metal, de forma a obter a maior quantidade possível de unidades e a menor quantidade de rejeitos?

Suponha que você seja contratado por uma Empresa de Produtos Alimentícios, com o intuito de colaborar com o processo de fabricação de embalagens referentes às latas de extrato de tomate, em formato cilíndrico, procurando reduzir seus gastos e minimizar perdas de material.

Sua primeira tarefa será maximizar o volume da lata de extrato de tomate. Sabendo-se que a Empresa compra da CSN (Companhia Siderúrgica Nacional) chapas de folha-de-flandres retangulares, você deverá determinar dimensões ótimas da chapa que resultam no maior volume da lata, supondo que o volume seja conhecido.

⁵ Esta situação foi inspirada e adaptada a partir de alguns sites que contemplam a área de Mecânica e de Pesquisas Operacionais. Disponíveis em: <<http://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo=matematica-ajuda-industria-fazer-cortes-pacotes-perfeitos&id=010170100219#.VrO7Thar TIW>> e <http://www.sobrapo.org.br/o_que_e_po.php>. Acesso em: 01 ago. 2015.

Como você pode determinar a forma mais econômica dessa lata (adotando-se o volume V), estabelecendo relações entre a altura h e o raio r que minimize o custo do material usado?

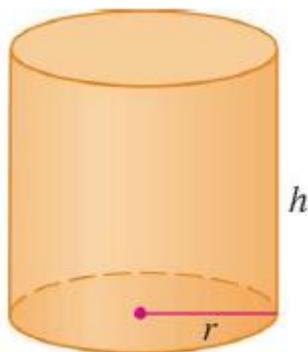


Figura 8 – Formato da lata.
Fonte: Fecha de entrega de proyecto⁶

Será que na prática, as latas produzidas e comercializadas realmente seguem com rigor às proporções encontradas, como isso pode ser verificado? Como explicar os resultados encontrados na questão anterior?

Estudo de apoio para o problema 3⁷

Buscando explicar os fenômenos observados no item anterior. São feitas as seguintes considerações:

O material para fazer as latas é cortado de folhas de metal. Os lados cilíndricos são formados por retângulos: esses retângulos são cortados da folha com uma ou nenhuma perda. Mas se os discos do topo e da base forem cortados de quadrados de lado $2r$ (figura 9), isso leva a uma considerável perda de metal, que pode ser reciclado, porém tem um pequeno ou nenhum valor para quem fabrica as latas. Se for esse o caso, encontre qual é a relação entre h e r (figura 8).

⁶ Esta ilustração, assim como as figuras 9 e 10, foi retirada de uma ficha de entrega de projeto (*Fecha de entrega de proyecto*), a qual fez parte das aulas de Matemática Básica 2, da Facultad de Ingeniería da Universidad de San Carlos de Guatemala, em 2014. Disponível em: <http://mate.ingenieria.usac.edu.gt/archivos/Proyecto2_103-1-00-2014_MB2-1s.pdf>. Acesso em 06 fev. 2016.

⁷ A atividade de apoio ao estudo para o problema 3 foi extraída e adaptada do livro de James Stewart, em relação às aplicações de derivadas. STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, v. 1, 2006.

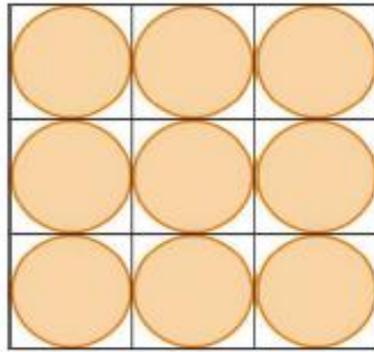


Figura 9 – Discos cortados em quadrados.
 Fonte: Fecha de entrega de proyecto

Uma maneira mais eficiente de obter os discos é dividir a folha de metal em hexágonos e cortar as tampas e bases circulares dos hexágonos (figura 10). Encontre qual é a relação entre h e r se for adotada essa estratégia.

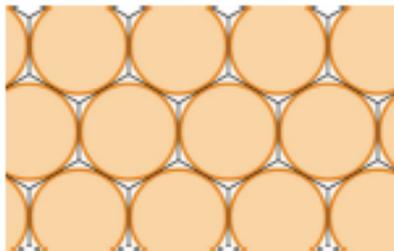


Figura 10 – Discos cortados em hexágonos.
 Fonte: Fecha de entrega de proyecto

Ao realizar os cálculos necessários, provavelmente os valores numéricos que serão encontrados para a razão h/r estarão próximos daqueles que realmente ocorrem nas prateleiras do supermercado, mas eles ainda não levam em conta tudo.

Se examinarmos mais de perto uma lata, veremos que a tampa e a base são formadas de discos com raio maior que r , que são dobrados sobre as laterais da lata. Se levamos em conta isso, deveremos aumentar o valor numérico da razão h/r .

Mais significativamente, além do custo do metal, devemos incorporar o custo de manufatura da lata. Vamos supor que a maior parte da despesa esteja em juntar

os lados para formar as latas. Se cortarmos os discos a partir de hexágonos (figura 10), vamos considerar que o custo foi dado e será proporcional a relação:

$4\sqrt{3}r^2 + 2\pi h + k(4\pi + h)$, onde k é recíproco do comprimento que pode ser associado ao custo de uma unidade de área de metal.

Dessa forma, mostre que essa expressão é minimizada quando:

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\frac{\pi h}{r} - 4\sqrt{3}}}$$

Após a explicação de tais fenômenos e dando continuidade aos estudos sobre o projeto solicitado pela Empresa, aplique seus conhecimentos à seguinte situação⁸:

“Em uma das etapas do processo de produção da massa de tomate, a polpa já processada é mantida em um recipiente cilíndrico. Para retirar completamente a polpa de dentro desse recipiente, pelo orifício inferior, são utilizadas duas pás acopladas a um eixo que corta o centro do cilindro. Para esvaziar completamente o recipiente, a pá imediatamente ao lado do orifício é mantida fixa, enquanto a outra executa uma revolução completa no sentido anti-horário. Seguindo a sua política de minimizar custos, a Empresa decidiu usar chapas de mesmo material utilizado nas latas, mantendo o perímetro de 36 cm.”

Sua tarefa agora é calcular o maior volume do recipiente onde será guardada a polpa, tendo como base a chapa referida.

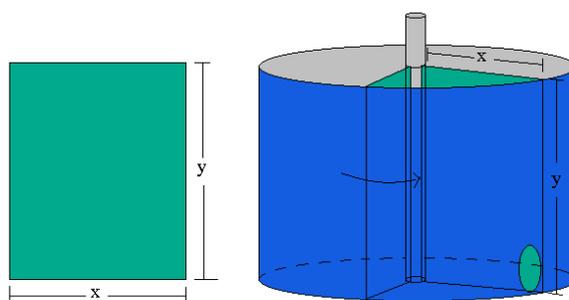


Figura 11 – Esquema da chapa utilizada.
Fonte: Retirada do projeto E-cadernos de Cálculo I

⁸ Esta situação foi adaptada do Projeto *E-cadernos de Cálculo I*, da Universidade de Brasília – UnB. O projeto foi realizado no segundo semestre de 2002, sobre o monitoramento do prof. Marcus Vinícius A. Moreira. Disponível em: <<http://www.mat.unb.br/grad/aulas/cadernos/calculo1/projetos/projeto1.html>>. Acesso em: 25 jul. 2015.

Para a fabricação de embalagens metálicas, diferentes tipos de chapas de metal são utilizadas, como a folha de flandres, a folha cromada, folha stancrom e folha não revestida.



Figura 12 – Embalagens metálicas.
Fonte: Retirado de www.agroevento.com

Em que consistem as diferenças de um material para outro, do ponto de vista de conhecimentos químicos?

Que vantagens fazem com que existam muitas embalagens de metal no mercado?

Por que se utiliza folha cromada ao invés de folha de flandres em certos casos?

Orientações didáticas

A gestão da sala de aula se dará de modo análogo aos problemas anteriores, adotando-se determinadas particularidades.

Inicialmente deverá ser feita a apresentação do problema dado e mobilização dos grupos contemplando ideias sobre otimização de lucros e a relevância desse assunto na área de atuação profissional, considerando cursos de graduação que envolvam Gestão de Produção, Economia ou questões relacionadas às áreas de Química, Biologia, entre outros.

As seguintes questões poderão complementar a dinâmica inicial da tutoria: Quais devem ser os materiais mais adequados para se produzir as embalagens? De que forma um profissional pode realizar algumas previsões em relação ao custo-benefício? Que estratégias podem ser adotadas a fim de se obter as dimensões ótimas da chapa? Quais conhecimentos voltados a essa área devem ser indicados como prioritários? É possível identificar os conceitos matemáticos envolvidos no problema

apenas com a leitura do mesmo? Em relação ao volume dado e a determinação de cálculos de áreas de superfícies, que conceitos estudados em momentos anteriores devem ser explorados?

Ainda no momento inicial deverão ser realizados diálogos entre os membros da equipe a respeito das primeiras reflexões; delegação das tarefas e dos planos de ação; registro das informações imprescindíveis e destaque para a atuação do coordenador e do relator.

No segundo momento (em outros encontros) serão discutidas e analisadas as informações e materiais obtidos. Sugestivamente questiona-se se “as informações que os estudantes conseguiram na delegação das primeiras tarefas são viáveis”? Houve material de estudo referente às abordagens matemáticas em questão, como taxa de variação e otimização?

Será fundamental a realização de constantes mediações por parte do tutor: direcionamentos dos grupos; sugestão de materiais de estudo e recursos de apoio (textos, trabalhos acadêmicos a respeito do assunto, livros didáticos, exemplos de aplicação).

De posse dos materiais de estudos analisados ou organizados, surge o compartilhamento de informações entre os integrantes de cada grupo. Se cada equipe estiver efetivamente pesquisando os dados elementares à resolução do problema, será possível realizar relatórios envolvendo questões gerais a respeito da produção das embalagens e pode-se (conforme estiver no planejamento do tutor) propor um estudo específico dos conceitos matemáticos envolvidos. Caso isso não ocorra, o tutor poderá sugerir como encaminhamento o estudo de derivadas e suas aplicações em problemas que envolvem otimização. Pode-se orientá-los para a realização de estudos individuais e/ou coletivos sobre: definições de conceitos; noções a respeito das principais regras de derivação; relações pertinentes aos valores de máximos e mínimos e às aplicações ao problema apresentado.

A parte referente ao estudo de apoio dada neste problema tem o intuito de contribuir com o processo de aprendizagem. Com essa proposta podem ser explorados conhecimentos sobre áreas de superfícies, otimizações e moldes dos recortes de embalagens.

O tópico referente a verificação das dimensões de embalagens cilíndricas encontradas nas prateleiras dos supermercados é viável. Nessa etapa, o tutor pode propor que os alunos realmente façam os testes na prática; que analisem diferentes embalagens, comparando os valores encontrados apenas por meio de medições usuais com os cálculos feitos através da aplicação do conceito de derivadas. Assim, é possível construir argumentos válidos que justifiquem as relações existentes entre raio e altura de embalagens cilíndricas.

Mediante essa proposta, os conhecimentos podem ser ampliados, pois há como abordar também questões envolvendo o custo da manufatura, a degradação (oxidação) de determinados tipos de materiais e outras relações matemáticas que se fundamentam nos conhecimentos sobre derivadas, além de questões relacionadas à sustentabilidade.

5.4. Problema 4 – Produção de citricultura⁹



Figura 13 – Produção de laranjas.
Fonte: Retirado de www.rankdobrasil.com.br

Setor altamente organizado e competitivo, a citricultura é uma das mais destacadas agroindústrias brasileiras. Responsável por 60% da produção mundial de suco de laranja, o Brasil é também o campeão de exportações do produto.

O cultivo de laranja no Brasil se divide em dois períodos distintos. O primeiro, de 1990 a 1999, se caracteriza pelo aumento da produção e conquista da posição de líder do setor. O segundo, a partir de 1999, é o período de consolidação da capacidade e desempenho produtivo. São colhidas, anualmente no País, mais de 18 milhões de toneladas de laranja ou cerca de 30% da safra mundial da fruta.

Para manter a liderança do setor, o Ministério da Agricultura investe no apoio a adoção de sistemas mais eficientes, como a produção integrada, com medidas para reduzir os custos, aperfeiçoar e ampliar a comercialização do produto. O Ministério tem, ainda, ação efetiva na fiscalização e prevenção ao aparecimento de pragas e doenças. O Estado de São Paulo é responsável por 74% desse total (IBGE – 2012).

Atualmente as informações configuram-se, cada vez mais, como essencial para a gestão, tomada de decisão e sucesso em uma atividade econômica. Na citricultura paulista, na última década, mudanças intensas foram registradas, com acentuados impactos em tecnologia, custo de produção, receita e rentabilidade. Essa evolução

⁹ Este problema foi inspirado em sites ligados à produção de laranjas no Brasil e análises sobre Agronegócios. Disponíveis em <http://www.agricultura.gov.br/vegetal/culturas/citrus> e <http://www.investe.sp.gov.br/setores-de-negocios/agronegocios/laranja/>. Acesso em 05 set. 2015.

contribuiu para agravar ainda mais a crônica carência de dados estatísticos e econômicos da cadeia citrícola.

Que tipo de informações a respeito da citricultura está disponível? A partir de tais informações é possível fazer algum tipo de previsão considerando os próximos anos? Quais aspectos interferem diretamente na produção de sucos de laranja?

Tratando-se de aspectos ligados à Economia, é possível identificar a taxa de variação do custo total quando x unidades são produzidas. De que forma a compreensão de conceitos matemáticos podem contribuir para a compreensão dos aspectos econômicos de um citricultor?

Orientações didáticas

A situação acima poderá ser proposta em cursos de graduação que estejam relacionados à formação de profissionais que atuem em Agronomia, Economia, Produção, entre outros.

Dispondo os alunos em grupos e tendo como intenção evidenciar aspectos vinculados à nossa realidade e à economia do país, o tutor pode sugerir a leitura e análise do texto que segue.

Texto complementar:

Sistema de produção de citros & importância econômica

“A história da citricultura brasileira está intimamente ligada à própria história do país. Poucos anos após a descoberta do Brasil, entre 1530 e 1540, os portugueses introduziram as primeiras sementes de laranja doce nos Estados da Bahia e São Paulo. Dadas às condições ecológicas favoráveis, as plantas produziram satisfatoriamente, a ponto de os frutos da laranja ‘Bahia’ serem reconhecidas ainda no Brasil Colônia como maiores, mais sucosos e de excelente qualidade do que os produzidos em Portugal. Mas, somente a partir dos anos 30 do século passado, a citricultura começou a ser implantada comercialmente nos Estados de São Paulo, Rio de Janeiro e Bahia, tendo apresentado maiores índices de crescimento nos estados do Sudeste e Sul.”

A citricultura brasileira apresenta números expressivos que traduzem a grande importância econômica e social que a atividade tem para a economia do país. Alguns desses números são mostrados concisamente: a área plantada está ao redor de 1 milhão de hectares e a produção de frutas supera 19 milhões de toneladas, a maior no mundo há alguns anos. O país é o maior exportador de suco concentrado congelado de laranja cujo valor das exportações, juntamente com as de outros derivados, tem gerado cerca de 1,5 bilhão de dólares anuais. O setor citrícola brasileiro somente no Estado de São Paulo gera mais de 500 mil empregos diretos e indiretos.

A Região Nordeste responde por 9% da produção nacional, constituindo-se na segunda maior região produtora do país, com mais de 110.000 hectares cultivados e mais de 1,5 milhões de toneladas. Dentre os estados produtores, o destaque fica com os estados Bahia e Sergipe, respectivamente segundo e terceiro produtores nacionais, que representam juntos 90% de toda área plantada. A citricultura nordestina tem grande potencial para implementar seu crescimento sobretudo em função da ausência de doenças e pragas de grande importância que se encontram distribuídas no Sudeste, maior centro produtor. No que diz respeito ao incremento e geração de empregos, percebe-se que devido à instalação de muitas casas de embalagens (packing-houses) e aumento da exportação do limão tahiti para o Mercado Europeu, muitos empregos diretos e indiretos têm sido oferecidos, na ordem de 100 mil. ”

*Claudio Luiz Leone Azevêdo
Embrapa, dez 2003*

Esse material pode instigar a curiosidade dos alunos, promover discussões e incentivar o levantamento de alguns pontos relevantes, como: apontar necessidades das empresas ligadas ao ramo de citriculturas; investigar alguns impactos econômicos que esse setor representa ao país; denotar alguns impactos na sociedade em relação a geração de lucros, da receita e da criação de empregos, dentre outros.

Essa dinâmica associada a outras informações levantadas pelos demais grupos seriam apresentadas de modo coletivo, usando esquemas, palavras-chave, mapas

conceituais, etc. A partir desse momento, começam os trabalhos de análises e discussão do problema em si.

O tutor tem o papel de conduzir esse processo: Que visão o grupo tem em relação ao problema e às suas aplicações profissionais? A equipe possui conhecimentos sobre funções marginais? Como levantar informações sobre os temas que estão implicitamente relacionados com o problema, em especial as taxas de variação (taxa de variação envolvendo produção, custo, lucro e receita)? De que formas há impactos econômicos desse tipo de situação à nossa sociedade? Que conceitos matemáticos há por trás das diferentes questões desse problema (como a relação entre a quantidade de produtos a serem produzidos e a mão-de-obra necessária)?

Possivelmente ocorrerão reencontros das equipes de trabalho, etapas nas quais há elaboração de estratégias de ação e seleção de referências complementares. Será possível elaborar roteiros de estudos ligados às necessidades das empresas/indústrias nesse caso e planejamentos voltados ao campo matemático.

Em relação à matemática, espera-se que os grupos percebam o quanto o trabalho com funções marginais está ligado ao conceito de derivadas e integrais. Deseja-se que haja uma gama de conhecimentos prévios essenciais ao desenvolvimento dos novos assuntos a serem trabalhados, como: análise e interpretação de funções no cotidiano; a compreensão de taxas de variação; a leitura e interpretação de gráficos; manipulação algébrica; e escolha do modelo matemático.

Tanto os alunos quanto o tutor poderiam observar se há domínio em relação a esses conhecimentos. Caso existam lacunas, planos de estudos paralelos podem ser indicados, a fim de retomar conceitos. Ao longo dos encontros e dos estudos individuais, que também são necessários, os alunos podem trocar suas experiências e se ajudar mutuamente.

A partir dessas orientações, os grupos provavelmente encontrarão referências ligadas a Matemática Aplicada às áreas Econômica e Administrativa. O tutor tem a incumbência de fornecer outras sugestões que contribuam para esse roteiro de estudos. Vincular o problema às ideias sobre o comportamento de funções e taxa de variação será fundamental.

É possível que ocorra uma abertura para o tutor realizar ponderações a respeito do campo matemático, principalmente quando se tratar de definições e regras de derivação/integração. Outro caminho é que o tutor proponha aos alunos a pesquisa de alguma definição ou técnica a ser usada e que, de modo voluntário, expliquem o que compreenderam a respeito do assunto. Ou seja, os estudantes agirão de forma independente, mesmo com a atuação do tutor, podendo fazê-lo com o apoio dos recursos disponíveis: lousa, computadores, livros didáticos, entre outros.

Com a proposta de estudos finalizada, os estudantes partem então para os processos de resolução do problema em si, atrelando suas aprendizagens com seu campo de atuação profissional. E as etapas posteriores ocorrem conforme detalhamos nas abordagens gerais do processo do PBL.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer desta dissertação buscamos estruturar relações entre algumas noções da disciplina de CDI e o uso de uma metodologia de ensino ativa, o PBL.

Nossos apontamentos iniciais deram ênfase às necessidades de se aliar conhecimentos teóricos aos práticos. Partimos do pressuposto de que as mais variadas áreas de ensino precisam estar conectadas umas às outras e, ponderamos, o quanto é preciso estimular o interesse dos universitários vinculando sua vida acadêmica com campos de atuação profissional. Acreditamos que esses são caminhos propícios para o desenvolvimento de competências e habilidades imprescindíveis à formação dos estudantes.

Ao longo do trabalho foram destacadas análises concernentes ao ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior. Posteriormente, exploramos contribuições referentes ao PBL.

Elaborar inferências sobre esses assuntos nos conduziu à defesa de que o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo precisa de outras ressignificações, o que pode ser feito por meio de vínculos com questões profissionais.

Nos amparamos nas ideias de Vygotsky para apresentar considerações que pudessem sustentar teoricamente os preceitos do PBL, e também responder à questão de pesquisa, que versava a respeito das potencialidades teóricas no uso do PBL, no ensino e aprendizagem de noções de CDI, focando uma abordagem transdisciplinar e a resolução de problemas reais ou realísticos. Julgamos que nosso objetivo em explorar essas potencialidades no ensino de noções de Cálculo por meio do PBL, e em propor o estudo dessas noções, por meio dessa metodologia de ensino, foi contemplado de modo construtivo.

Como vantagens, podemos apontar que os estudantes são mais motivados a aprender, tornando-se mais comprometidos e participativos; há uma maior significação em relação aos conceitos trabalhados; o que foi aprendido passa a ser mais duradouro, mas não pela prática de memorizações; há um reconhecimento maior de que os conceitos são úteis às suas carreiras (desenvolvem habilidades e competências elementares ao seu campo profissional); ocorre uma maior interação

entre os indivíduos envolvidos e respeito ao trabalho em parcerias; aumento da capacidade de resolução de problemas; possibilita mudanças de posturas e atitudes; dentre outros (RIBEIRO, 2008b).

No tocante a ótica do professor, esta pesquisa propõe a ampliação de sua rede de conhecimentos e pesquisas; sugere que o mesmo interaja com outras áreas de conhecimento (e com outros profissionais); torna-o mais flexível e motivador; seus potenciais pessoais e profissionais são ainda mais mobilizados; sua postura passa a ser de facilitador da aprendizagem e, mesmo que não seja especialista em determinados assuntos, pode promover direcionamentos gerais; dentre outras habilidades.

Este estudo ampliou nossos horizontes, pois propôs uma expectativa de ensino vinculada às prováveis carreiras dos universitários. Ao mesmo tempo em que almeja estimular o interesse dos estudantes a respeito das noções de Cálculo, intencionamos ressaltar o quanto esta área contribui com expectativas emergentes na sociedade contemporânea.

As sugestões de atividades propostas no apêndice denotam a visão holística que se pretende desenvolver, em prol do processo de ensino e aprendizagem. Para resolvê-las, não são necessários apenas conceitos específicos de uma ou outra disciplina, mas é preciso articular os conhecimentos, relacionando uns aos outros e complementando-os. Estes ideais foram pautados na dialógica entre ensino, pesquisa e prática profissional, conforme Klein e Souza (2013).

Essas atividades procuram contemplar a aplicação de conhecimentos matemáticos, tecnológicos e instrumentais à carreira escolhida; estimulam o trabalho com projetos, à condução de experimentos e a interpretação de seus resultados; contribuem para uma prática efetiva de planejar, elaborar e coordenar diferentes situações; colabora com a identificação, análise e resolução de problemas. Além disso, essas tarefas devem cooperar com o desenvolvimento de eficientes comunicações orais e escritas, bem como preparar os estudantes para melhores atuações profissionais.

As descobertas aqui realizadas sugerem que é possível promover a aprendizagem de tópicos de CDI, sob o olhar dessa metodologia de ensino. O problema, a dinâmica da aula, as prováveis interações entre estudantes e tutor, favorecem a aprendizagem

porque atendem expectativas relacionadas à inserção de processos ativos e construtivistas. E também, essas relações satisfazem os pressupostos de que ligações entre teoria e prática profissional aproximam o sujeito de seu objeto de estudo (KLEIN; SOUZA, 2013).

Entendemos que por meio da utilização do processo PBL e das relações entre conhecimentos teóricos e práticos, o aspecto transdisciplinar possivelmente será contemplado. Reitera-se que “a transdisciplinaridade, assumindo a inconclusividade do ser humano, rejeita a arrogância do saber concluído e das certezas convencionadas e propõe a humildade da busca permanente” (D’AMBRÓSIO, 2007).

As situações nas quais os alunos serão confrontados (ou inseridos) poderão estabelecer os aspectos envolvidos na citação anterior, isto é, a situação apresentada aos estudantes, não possui respostas prontas e não há a reprodução de conhecimentos amparados apenas em técnicas de resolução de exercícios. O processo almejado faz com que os grupos busquem resgatar conhecimentos anteriores, desenvolvendo novos saberes. A partir das bases disciplinares e da propiciação de um olhar mais abrangente, objetivamos transpor os conhecimentos isolados de determinadas áreas.

As contribuições teóricas selecionadas geraram considerações quanto à elaboração ou adaptação de um problema nos moldes do PBL. Mas, enquanto pesquisadores e construtores de algumas situações de aprendizagem, observamos que essa não é uma tarefa simples. Não encontramos problemas mal estruturados, abertos, com enfoques profissionais e interdisciplinares em materiais didáticos.

Deparamo-nos com alguns projetos de ensino, com aplicações de conceitos, mas, do modo como são apresentados, exigem adaptações para que caracterizem um problema nos moldes do PBL. Portanto, esse aspecto pode ser considerado como uma desvantagem. O docente precisa estar ciente de que terá que se dedicar para construir um problema no formato do PBL.

Uma base sólida de pesquisas e materiais (produções científicas, busca por temas atuais) precisa ser elaborada. Exercícios matemáticos usuais, ou a aplicação de conceitos elementares, nesta abordagem metodológica, devem necessariamente ser vinculados a outros campos de conhecimento e ao campo de atuação profissional.

Esses fatores exigem disponibilidade e interesse por parte do docente. São imprescindíveis recursos que viabilizam essas construções (flexibilidade de tempo para estudos, disponibilidade de recursos necessários). Dependendo da carga horária do professor e dos materiais que possui em mãos, a elaboração do problema pode tornar-se um grande desafio, sendo visto inclusive como um obstáculo a ser superado.

Outros entraves podem ocorrer ao longo da dinâmica do PBL. Os docentes podem sentir-se inseguros, seja no aspecto de direcionamentos aos grupos ou nas abordagens a respeito de conceitos que não são pertinentes à sua área de atuação (formação). As sessões tutoriais são planejadas, no entanto, podem tornar-se imprevisíveis, pois dependem muito das atuações dos alunos e dos planos de ação executados (RIBEIRO, 2008b).

Os estudantes, por sua vez, podem sentir imprecisões acerca do conhecimento de teorias mais avançadas. Estudantes que são mais individualistas, introvertidos ou ainda competitivos podem talvez sentir dificuldades para trabalhar em equipe. No entanto, o tutor deve enfatizar o quanto essa habilidade é fundamental para uma atuação profissional de sucesso. Como o desenvolvimento dessa metodologia é processual será necessário que o tempo de dedicação dos estudantes também seja maior, pois mais campos de conhecimentos tendem a ser abordados (RIBEIRO, 2008b).

A proposta de uma abordagem nos padrões do PBL, assim como outras estratégias de ensino, é construtiva, colaborativa e foca em um maior comprometimento tanto do docente quanto do discente. Seu diferencial está no fato de articular situações reais ou realísticas, advindas de atuações profissionais, à realidade acadêmica de cursos que têm o Cálculo como requisito elementar.

Este trabalho não utiliza dados ou fatos empíricos para validar nossas reflexões. Fez-se necessário construir uma rede de elementos lógicos e coerentes (FIORENTINI, 2007). Abrangendo contribuições teóricas a respeito do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral e da Aprendizagem Baseada em Problemas, uma vez que não encontramos materiais didáticos relacionando ambas.

Indicamos sugestões de atividades que são identificadas como o produto final desta dissertação de mestrado. Com o auxílio das orientações compiladas, consideramos

que essas abordagens são pertinentes ao desenvolvimento da Matemática Avançada em cursos superiores.

As potencialidades aqui ressaltadas (vantagens, desvantagens e possíveis entraves) sugerem o quanto as pesquisas acadêmicas são necessárias. Se desejamos superar alguns obstáculos que comprometem a qualidade do ensino de CDI, é primordial indagar, investigar, pesquisar e inovar (FREIRE, 1996, p. 29).

Segundo as constatações realizadas, juntamente com o produto final gerado a partir desta pesquisa, esperamos que novas reflexões acerca do uso de uma metodologia de ensino ativa, em especial, o PBL, possam ser direcionadas à área de Cálculo. Deixamos como sugestão para futuras pesquisas a organização da disciplina de CDI por meio do PBL, para as especificidades de determinado curso de graduação, essa perspectiva não foi explorada aqui.

Outra possibilidade de pesquisa é a aplicação (empírica) dos problemas sugeridos neste estudo. As mesmas são sugestões de trabalho que têm a intenção de orientar uma dinâmica inovadora e criativa, e não estão fechadas ou são definitivas.

Inspirados no provérbio chinês citado no início deste trabalho, finalizamos afirmando que, durante o processo de ensino e aprendizagem, se simplesmente falarmos sobre conceitos de CDI, provavelmente o estudante esquecerá; se só mostrarmos a ele como se faz, por meio das definições e técnicas, possivelmente ele lembrará; mas, se conseguirmos envolvê-lo, de modo ativo e significativo, certamente, ele compreenderá aquilo que se pretende ensinar.

REFERÊNCIAS

ABREU, O. H.; REIS, F. da S. Uma discussão sobre o papel das definições formais no ensino e aprendizagem de limites e continuidade em cálculo I. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 439-459, 2011.

ALBANESE, M. A.; MITCHELL, S. Problem-based learning: a review of literature on its outcomes and implementation issues. **Academic Medicine**, v. 68, p. 52-81, 1993.

ALMEIDA, M. V. de; IGLIORI, S. B. C. Educação matemática no ensino superior e abordagens de Tall sobre o ensino/aprendizagem do Cálculo 1. **Educação matemática e pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 718-734, 2013.

_____. O ensino/aprendizagem de cálculo diferencial e integral: sob a perspectiva de David Tall. **Revista Produção Discente Educação Matemática**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 148-150, 2012.

ANGELO, M. F.; BERTONI, F. C. Análise da aplicação do método PBL no processo de ensino e aprendizagem em um curso de engenharia de computação. **Revista de ensino de engenharia**, v. 30, n. 2, p. 35-42, 2011.

ARAÚJO, U. F.; ARANTES, V. A. Comunidade, conhecimento e resolução de problemas: o projeto acadêmico da USP Leste. In: ARAÚJO, U. F.; SASTRE, G (Orgs). **Aprendizagem baseada em problemas no ensino superior**. 2. ed. São Paulo: Summus, 2009, p. 101-121.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73- 80, 2004.

BARBOSA, J. C.; SANTOS, M. A. Modelagem matemática, perspectivas e discussões. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., Belo Horizonte. **Anais...** Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. 1. CD-ROM.

BARROWS, H.; TAMBLYN, R. M. Problem-based: rationale and definition. In: **Problem-based learning: approach to medical education**. cap. 1, p. 1-18, 1980. Disponível em: <

<http://apps.fischlerschool.nova.edu/toolbox/instructionalproducts/edd8124/fall11/1980-BarrowsTamblyn-PBL.pdf>>. Acesso em: 27 nov. 2014.

BARUFI, M. C. B. **A Construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral**. 1999. 184 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BRANDA, L. A. A aprendizagem baseada em problemas – o resplendor tão brilhante de outros tempos. In: ARAÚJO, U. F.; SASTRE, G (Orgs). **Aprendizagem baseada em problemas no ensino superior**. 2. ed. São Paulo: Summus, 2009, p. 205-236.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 1.302/2001. Diretrizes curriculares nacionais dos cursos de graduação para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 05 mar. 2001, p. 15. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>>. Acesso em: 05 ago. 2014.

_____. Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação**. Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn1.pdf>. Acesso em: 13 maio 2015.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC / SEF, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 04 jun 2015.

CAMP, G. Problem-based learning: a paradigma shift or a passing fad?. **Medical education at the University of Texas Medical Branch**, vol. 1, n. 2, 1996.

COELHO-FILHO, J. M.; SOARES, S. M. S.; SÁ, H. L. C. e. Aprendizagem baseada em problemas: aplicação e possibilidades no Brasil. **Revista da Associação Paulista de Medicina**, São Paulo, v. 116, n. 4, 1998.

CONWAY, J.; LITTLE, P. From practice to theory: curriculum development for problem-based learning. In: TAN, O. S. et al. **Problem-based learning. Educational innovation across disciplines: a collection of selected papers**. Singapore: Temasek centre for problem based learning, 2000. Disponível em: <http://www.tp.edu.sg/staticfiles/TP/files/centres/pbl/pbl_janeconwaypennylittle.pdf>. Acesso em: 06 fev. 2016.

CRUZ, C. H. C. **Competências e habilidades: da proposta à prática educativa**. 5. ed. São Paulo: Loyola, 2010.

CURY, H. N. Estilos de aprendizagem de alunos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 28., 2000, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: [s.n.], 2000. CD-ROM.

CURY, H. N.; BISOGNIN, E. Calculando o volume de um sólido: como a análise de erros pode auxiliar professores a elaborar atividades de ensino para calouros na engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 34., 2006, Passo Fundo. **Anais...** Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2006.

CURY, H. N.; CASSOL, M. Análise de erros em cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 6, n. 1, p. 27-36, jan./jun. 2004.

CYRINO, E. G.; TORALLES-PEREIRA, M. L. Trabalhando com estratégias de ensino-aprendizado por descoberta na área da saúde: a problematização e a aprendizagem baseada em problemas. **Cadernos de saúde pública**, Rio de Janeiro, v. 20, n. 3, p. 780-788, maio/jun. 2004.

D' AMBRÓSIO, U. A transdisciplinaridade como uma resposta à sustentabilidade. **Nupeat**, v.1, n.1, p.1-13, jan./jun. 2011. Disponível em: <<http://www.revistas.ufg.br/index.php/teri/article/view/14393>>. Acesso em: 24 maio 2015.

_____. Educação para compartilhar desenvolvimento e sustentabilidade. **Desenvolvimento e Meio Ambiente**, Editora UFPR, n. 15, p. 11-20, jan./jun. 2007.

_____. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005.

DEMO, P. **Pesquisa e construção de conhecimento: metodologia científica no caminho de Habermas**. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1997.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998. Disponível em: <http://boltz.ccne.ufsm.br/pub/mpeac/other/pozo_solucão_problemas_cap_01.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2014.

ENEMARK, S.; KJAERSDAM, F. A ABP na teoria e na prática: a experiência de Aalborg na inovação do projeto no ensino universitário. In: ARAÚJO, U. F.; SASTRE, G. (Orgs.). **Aprendizagem baseada em problemas no ensino superior**. 2. ed. São Paulo: Summus, 2009, p. 17-41.

FILHO, E.; RIBEIRO, L. R. de C. Aprendendo com PBL - aprendizagem baseada em problemas: relato de uma experiência em cursos de engenharia da EESC-USP. **Revista Minerva**, v. 6, p. 23-30, 2009.

FINO, C. N. Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP): Três implicações pedagógicas. **Revista Portuguesa de Educação Online**, Portugal, v. 14, n. 2, 2001. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=37414212>>. Acesso: 02 maio 2015.

FIORENTINI, D. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 2. ed. Campinas: Autores associados, 2007.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FROTA, M. C. R. Investigações na sala de aula de cálculo. In: REUNIÃO DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 29, 2006, Caxambu. **Anais...** Caxambu: ANPED, 2006. p. 1-14.

GIJSELAERS, W. Perspectives on problem-based learning. In: **Educational Innovation in Economics and business administration**: The case of problem-based learning. Netherlands: Kluwer Academic, 1995, cap. 5, p. 39-52. Disponível em: <<http://pub.maastrichtuniversity.nl/3b046f8a-5c49-4735-bc01-46bbb07167f1>>.

Acesso em: 06 dez. 2014.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GRAAFF, E.; KOLMOS, A. Characteristic of problem-based learning. **International Journal of Engineering Education**, Great Britain, v. 19, n. 5, p. 657-662, 2003.

HASSAN, M. A. A.; et al. A review and survey of problem-based learning: application in engineering education. In: CONFERENCE ON ENGINEERING EDUCATION, 2004, Kuala Lumpur. **Proceedings...** Kuala Lumpur, p. 14-15, dec 2004.

HMELO-SILVER, C. E. Problem-based learning: what and how do students learn?. **Educational Psychology Review**, v. 16, n. 3, p. 235-266, sep. 2004.

HMELO-SILVER, C. E.; BARROWS, H. S. Facilitating Collaborative Knowledge Building. **Cognition and instruction**, v. 26, p. 48-94, 2008.

_____. Goals and strategies of a PBL facilitator. **Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning**, v. 1, n. 1, p. 21-39, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.7771/1541-5015.1004>>. Acesso em: 10 abr. 2014.

HUNGER, D; LEPRE, R. M. Da necessária relação entre teoria e prática na formação acadêmica. **Jornal Unesp**. São Paulo, mar 2013, ano XXVII, n. 286. Disponível em <http://www.unesp.br/aci_ses/jornalunesp/acervo/286/forum-dagmar-hunger-rita-melissa>. Acesso em: 24 maio 2015.

IGLIORI, S. B. C. Uma contribuição para o ensino-aprendizagem de noções do cálculo diferencial integral. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9.,

Belo Horizonte. **Anais...** Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. 1. CD-ROM.

KAUFMAN, D. M. Problem-based learning: using cases to teach about how to deal with ethical problems. **NCEHR**, v. 8, n. 2, p. 7-10, 1998.

KLEIN, A. M.; SOUZA, L. L. Aprendizagem baseada em problemas. **Jornal Unesp**. São Paulo, mar 2013, ano XXVII, n. 286. Disponível em: <http://www.unesp.br/aci_ses/jornalunesp/acervo/286/forum-laurence-duarte-colvara>. Acesso em: 25 maio 2015.

KOLMOS, A.; GRAAFF, E. de; DU, X. Diversity of PBL – PBL learning principles and models. In: DU, X.; GRAAFF, E. de; KOLMOS, A. **Research on PBL practice in Engineering Education**. Rotterdam: Sense, 2009, p. 9-22.

LEVY, L. F.; SANTO, A. O. do E. Modelagem matemática no ensino, complexidade e saberes necessários à educação do futuro. **Zetetiké**, v. 19, n. 35, jan./jun. 2011.

LIMA, T. C. S.; MIOTO, R. C. T. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista Katál**. Florianópolis, v. 10, n. esp. p. 37-45. 2007.

MACDONALD, R. Problem-based learning: implications for educational developers. **Educational Developments**, v. 2, n. 2, p. 1-5, 2001.

MAMEDE, S.; PENAFORTE, J. et al. **Aprendizagem baseada em problemas: anatomia de uma nova abordagem educacional**. Fortaleza: Hucitec, 2001.

MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa em mapas conceituais. Porto Alegre: UFRGS. **Textos de apoio ao professor de Física**, v. 24, n. 6, 2013. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/tapf/v24_n6_moreira_.pdf>. Acesso: 04 jan. 2016.

NASSER, L. Educação matemática no ensino superior. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, Recife. **Anais...** Recife, VIII ENEM. 2004.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento, um processo sócio-histórico**. São Paulo: Scipione, 1993.

ONUICHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223514005>>. Acesso: 27 abr. 2015.

PERRENOUD, P. et al. **As competências para ensinar no século XXI: a formação dos professores e o desafio da avaliação**. Porto Alegre: Artmed, 2002.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PROBLEM-BASED Learning. Speaking of Teaching, Stanford University Newsletter on Teaching, **Winter**, v. 11, n. 1, 2001. Disponível em: <http://web.stanford.edu/dept/CTL/cgi-bin/docs/newsletter/problem_based_learning.pdf>. Acesso em: 02 out 2014.

REIS, F. da S. **A tensão entre o rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. 302 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

REZENDE, W. M. **O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. 450 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo.

RIBEIRO, L. R. de C. Aprendizagem baseada em problemas (PBL) na educação em engenharia. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 27, n. 2, p. 23-32, 2008a.

_____. **Aprendizagem baseada em problemas (PBL): uma experiência no ensino superior**. São Carlos: EdUFSCAR, 2008b.

SANTOS, A. Complexidade e transdisciplinaridade em educação: cinco princípios para resgatar o elo perdido. **Revista Brasileira de Educação**, v. 13 n. 37 jan./abr. 2008.

SAVERY, J. R. Overview of problem-based learning: definitions and distinctions. **Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning**, v. 1, n. 1, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.7771/1541-5015.1002>>. Acesso em: 25 jun. 2014.

SAVIN-BADEN, M. et al. An evaluation of implementing problem-based learning scenarios in an immersive virtual world. **International Journal of Education Medical**, v. 2, n. 2, p. 116-124, 2011.

SAVIN-BADEN, M. **Problem-based learning in higher education: untold stories**. Buckingham: Open University Press. 2000.

SCHMIDT, H. G. Foundations of problem-based learning: some explanatory notes. **Medical Education**. Maastricht, v. 27, p. 422-432, 1993.

SCHMIDT, H. G et al. Problem-based learning is compatible with human cognitive architecture: commentary on Kirschner, Sweller, and Clark (2006). **Educational Psychologist**, v. 42, n. 2, p. 91–97, 2007.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 23. ed. São Paulo: Cortez, 2007.

SILVA, A. M. da. **Um modelo de ensino de cálculo diferencial e integral utilizando aplicações às disciplinas: biologia, física e química**. 1979. 69 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

SILVA, B. A. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do cálculo. **Educação Matemática e Pesquisa**. São Paulo, v. 13, n. 3, p. 393-413, 2011.

SMITH, H. C. A course director's perspectives on problem-based learning curricula in biochemistry. **Academic Medicine**, v. 77, n. 12, p. 1189-1198, dec. 2002.

SOARES DE MELLO, João C. C. B.; SOARES DE MELLO, Maria H. C. Integração entre o ensino de cálculo e o de pesquisa operacional. **Revista Produção**, v. 13, n. 2, p. 123-129. 2003.

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006, v. 1.

TALL, D. Student's difficulties in calculus. Proceedings. **ICME**, Québec, p. 13-28, 1992.

VALERO, P. De carne y hueso. La vida social y política de la competencia matemática. In: MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL DE COLOMBIA (Ed.). **Memorias del Foro Educativo Nacional de Colombia**, Bogotá: MEN, 2006. Disponível em: <<http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/article-113423.html>>. Acesso em: 22 jul. 2015.

VERNON, D. T. A.; BLAKE, R. L. Does problem-based learning work? A meta-analysis of evaluative research. **Academic Medicine**, v. 68, n. 7, p. 550-563, 1993.

VIEIRA, A. F. **Ensino de cálculo diferencial e integral: das técnicas aos humans – with – media**. 2013. 204 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

VYGOTSKY, L. S. Interaction between learning and development. In: **Mind and society**. Cambridge, p. 79-91, 1978. Disponível em: <<http://www.psy.cmu.edu/~siegler/vygotsky78.pdf>>. Acesso em: 20 maio 2015.

_____. **Pensamento e linguagem**. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

_____. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

WALSH, A. **The tutor in problem based learning: a novice's guide**. Faculty of health sciences, McMaster University. Canada, 2005. Disponível em: <<http://fhs.mcmaster.ca/facdev/documents/tutorPBL.pdf>>. Acesso em: 27 nov. 2014.

WOOD E. J. Problem-based learning. **Acta Biochimica Polonica**, v. 51, n. 2, p. 21-26, 2004a.

_____. Problem-based learning: exploiting knowledge of how people to promote effective learning. **Bioscience Education**, v. 3, may 2004b.

WOODS, D. R. How to manage the transition to PBL? Cap. 7. In: **Preparing for PBL**, 3. ed., 2006. Disponível em: <<http://cfl.mcmaster.ca/resources/pbl.html>>. Acesso em: 21 jul. 2015.

APÊNDICE: PRODUTO FINAL

Débora Vieira de Souza

Orientador: Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca

**O ENSINO DE NOÇÕES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E
INTEGRAL POR MEIO DA APRENDIZAGEM BASEADA EM
PROBLEMAS**

Introdução

A partir de nossos estudos vinculados à dissertação do curso de Mestrado Profissional de Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, *campus* São Paulo, apresentamos este material, considerando-o como o produto final da nossa pesquisa.

Sua elaboração apresenta sugestões de problemas contextualizados, reais ou realísticos, ligados às possíveis atuações profissionais de estudantes (de determinados cursos de graduação). Enfocamos que o caráter desses problemas é de fim aberto e mal estruturado e contemplam o estudo de noções de Cálculo Diferencial e Integral, adotando como princípio norteador a Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL.

Este material é direcionado ao docente que tenha interesse em trabalhar com uma metodologia de ensino ativa e diferenciada, no caso, o PBL, o qual está associado ao desenvolvimento de competências conceituais e profissionais dos estudantes. Sugerimos também a leitura da dissertação na íntegra.

Apresentamos quatro problemas no formato do PBL. E desse total, dois deles possuem alguns estudos de apoio como complementação, os quais, assim como os problemas em si, podem ser adaptados conforme a realidade dos cursos ao qual estão vinculados (além da experiência de trabalho proveniente de cada tutor/professor).

Nossas considerações em relação à dinâmica da sala de aula num contexto PBL, baseiam-se nas ideias de Ribeiro (2008b) e Araújo e Arantes (2009). Mais adiante, apresentamos alguns encaminhamentos para a realização das sessões de tutoria, essenciais em uma proposta de ensino no formato do PBL.

O uso do PBL no ensino de noções de Cálculo Diferencial e Integral

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral, como limites, derivadas e integrais, está atrelado às diversas áreas de conhecimento. Esse campo de estudos é uma ferramenta útil às possíveis realidades profissionais dos estudantes e, portanto, pode ser contemplado sob uma perspectiva que explore as aplicações de forma ativa e construtiva. Isto é, faz-se necessário estabelecer conexões efetivas entre conhecimentos teóricos e as prováveis atuações práticas, as quais, de fato,

aproximem os conceitos matemáticos abordados em sala de aula com realidades profissionais dos estudantes.

Formas diferenciadas de se contemplar a disciplina de Cálculo podem aproximar os conceitos às necessidades reais dos discentes. Almeja-se que esse campo de estudos propicie o encorajamento dos alunos perante a uma tomada de decisões; que sejam capazes de resolver problemas; que realizem novas descobertas por meio dos conceitos estudados; além de entender que a Matemática é uma ciência conectada às mais diversas áreas do conhecimento.

Para tanto, busca-se vislumbrá-la de forma significativa, possibilitando uma visão global dos conteúdos e permitindo que os universitários estejam aptos para a inserção nos setores profissionais. O processo de ensino e aprendizagem pode ser favorecido por meio de situações contextualizadas, interdisciplinares, que colaborem com a construção de conhecimentos transdisciplinares, ou seja, que contribuam com o desenvolvimento de competências conceituais, atitudinais e procedimentais.

Propomos que o ensino de Cálculo ocorra de forma dinâmica, na qual tanto o aluno quanto o professor participem ativamente do processo de ensino e aprendizagem.

Sendo assim, atrelamos o ensino de noções de Cálculo Diferencial e Integral à Aprendizagem Baseada em Problemas (Problem-Based Learning - PBL), almejando ressignificar saberes na área de Cálculo. Isso porque o PBL é uma metodologia de ensino que adota o uso de problemas reais ou realísticos (aqueles que são passíveis de ocorrer em uma certa área profissional) durante o processo de ensino e aprendizagem.

A característica de problemas no formato do PBL explora situações desafiadoras. Os mesmos devem ser mal estruturados e de fim aberto, pois objetivam que os conhecimentos sejam extensivos e flexíveis. As situações apresentadas aos alunos possibilitarão que os mesmos tomem o problema para si. Com isso, entende-se que serão mais motivados a aprender determinados conceitos de forma significativa, promovendo perspectivas transdisciplinares, as quais possam ir além dos ambientes da sala de aula. Com isso, busca-se alcançar mudanças de comportamentos e a adoção de uma visão holística dos conhecimentos por parte dos estudantes.

A dinâmica da Aprendizagem Baseada em Problemas

Antes de iniciar o processo de aprendizagem é fundamental que ocorra a conscientização acerca dos objetivos da metodologia e do trabalho a ser feito. Os estudantes precisam entender que todo processo se dá por meio de tutorias e possíveis consultorias, as quais substituem as aulas tidas como tradicionais, proporcionando um ambiente mais dinâmico e interativo.

Para tanto, os alunos deverão ser organizados em pequenos grupos, em torno de quatro ou cinco pessoas (recomenda-se que no PBL, os grupos não sejam formados com mais de oito alunos) e o professor assume agora a postura de tutor ou facilitador da aprendizagem.

Os problemas selecionados são apresentados às equipes antes dos conceitos serem abordados. Para analisá-los, cada grupo deve eleger desde o início um coordenador e um relator (ou secretário). O coordenador tem a responsabilidade de conduzir as conversas em grupo – atua como líder da equipe. Já o relator tem a função de registrar os pontos mais importantes das reuniões, além de pontuar quais serão as tarefas de cada membro antes dos próximos encontros. É preciso que haja rotatividade de papéis entre os participantes do grupo, a fim de trabalhar atitudes e comportamentos essenciais às atuações profissionais.

As dinâmicas das sessões tutoriais respeitam alguns aspectos gerais. São elas: a análise do problema e o planejamento da pesquisa; o desenvolvimento das ações que levarão à resolução do problema; a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios (ARAÚJO; ARANTES, 2009). Vejamos:

- Análise do problema e planejamento da pesquisa

Ocorre nessa fase a apresentação de uma visão geral sobre a situação a ser explorada. A intenção é mostrar o quanto o problema está próximo de suas futuras realidades profissionais, isso se dá por meio da leitura coletiva do problema, apresentação do contexto e registro de possíveis palavras ou termos desconhecidos, esses deverão ser pesquisados posteriormente. O interesse pelo problema deve ser despertado e os grupos tendem a perceber que há lacunas em seus conhecimentos, logo, faz-se necessária a realização de pesquisas acerca do assunto abordado.

Parte-se, então, para a execução de um mapeamento e busca de informações sobre o problema: surgem organizações de ações e trocas de experiências entre os membros da equipe. Destacamos, também, que nessa etapa, deverá surgir a elaboração de hipóteses e definições das estratégias para responder ao problema, considerando o tempo disponível para executá-las, esse tempo depende da carga horária da disciplina e do planejamento do tutor (professor). Pode-se sugerir também que os grupos elaborem um projeto (de pesquisa), dependendo das intencionalidades do tutor das aulas.

- Ações que levarão à resolução do problema

Nessa etapa ocorre o desenvolvimento de estudos, pesquisas e intervenções em favor do problema, contando com possíveis consultorias de outros profissionais (ou professores).

A dinâmica do plano de aulas no formato PBL dificilmente se restringe a um único momento. Após o primeiro contato com o problema, no qual surgirão indagações, hipóteses e alguns planos de ação, os discentes precisam se reencontrar a fim de apresentar e discutir tudo o que foi desenvolvido (o que pode ter sido feito ao longo de uma semana, por exemplo). De posse de seus materiais de estudos, ou seja, com as pesquisas realizadas, os grupos falam sobre suas descobertas e, com embasamentos teóricos, compartilham suas informações com os outros membros da equipe.

O tutor, realizando suas orientações, analisa as interpretações dos alunos e possibilita encaminhamentos a respeito do trabalho com conceitos envolvidos, mesmo que englobe outras áreas de conhecimento. Todavia, esse tutor precisa analisar se a escolha das variáveis, das decisões adotadas pelos alunos não irá levar à construção de conhecimentos incompatíveis. Previsões e análises das dificuldades também devem ser uma das preocupações desse facilitador, tanto em relação aos conhecimentos gerais como ao comportamento que cada grupo possa apresentar.

Reiteramos que cada um desses apontamentos, analisados de modo processual, pretendem diagnosticar a aquisição de conhecimentos transdisciplinares e, precisam, assim, ser bem estruturados.

- Socialização dos conhecimentos produzidos e produção de relatórios

Essa será a última etapa do trabalho com problemas no formato PBL. Essa socialização se dá por meio do compartilhamento dos conhecimentos produzidos, com os demais grupos e com o tutor envolvido. Propõe-se a apresentação de um relatório acadêmico-científico, no qual conste a trajetória do projeto desenvolvido, as pesquisas realizadas e os resultados obtidos ao final da proposta.

As soluções podem ser apresentadas aos demais membros da sala e pode-se efetuar validações das mesmas, a partir dos conhecimentos adquiridos. Momento este em que há abertura para a exposição das ideias e troca de experiências com os outros grupos.

Os processos de avaliação dessas sessões podem ter caráter tanto processual quanto formativo. Dentre eles pode-se considerar: a produção e a análise dos relatórios; os aspectos pertinentes à autoavaliação; a avaliação dos membros da equipe; a apropriação dos conceitos estudados; dentre outras.

Sendo assim, os conhecimentos adquiridos são pontuados pelos próprios estudantes. E o tutor ao longo do projeto tende a identificar se os novos conhecimentos realmente estão sendo construídos. Ou seja, os métodos de resolução e os conceitos matemáticos trabalhados vão sendo institucionalizados durante todos os encontros, inclusive quanto à formalização de conceitos. A ideia é que esses estudantes notem o quanto a apreensão do problema pode colaborar para o desenvolvimento de suas competências conceituais, atitudinais e profissionais.

A seguir, apresentamos sugestões de problemas ligados às noções de Cálculo Diferencial e Integral de acordo com o PBL.

Problema 1 – Água mineral contaminada



Figura 2 – Água mineral.

Fonte: Retirado de <http://franquiaempresa.com/>

Com a escassez de água no Estado de São Paulo, a demanda de uma Companhia de Água Mineral aumentou muito. A demanda foi tão grande que o gerente precisou adquirir 10 milhões de litros de água de outro fornecedor.

Infelizmente, houve a desconfiança de que a água que ele comprou estava contaminada pela bactéria *Pseudomonas aeruginosa*. De que forma essa desconfiança poderia ser confirmada ou refutada?

Suponha que adotando uma das formas que você indicou para a verificação da contaminação na água, a desconfiança foi confirmada, a água realmente está contaminada por *Pseudomonas aeruginosa*, indicando uma quantidade de 13 UFC/100ml.

Qual é a quantidade de *Pseudomonas aeruginosa* para que a água seja considerada imprópria para o consumo?

Se você fosse o gerente dessa Companhia, o que você faria para não ter prejuízo e não perder toda a água adquirida?

Orientações Didáticas

Seguem abaixo algumas questões subjacentes que poderão complementar o planejamento para a resolução ou encaminhamento do problema. Caso essas

questões não sejam propostas pelos estudantes (organizados em grupo) elas poderão ser feitas pelo tutor. Inicialmente será fundamental indicar as palavras ou termos desconhecidos pelos integrantes do grupo para iniciar a pesquisa.

- Existe alguma diferença entre água contaminada e água poluída?
- As bactérias pseudomonas aeruginosa podem causar que tipo de prejuízos à saúde?
- Qual é a taxa de proliferação da população desse tipo de bactéria?
- Qual é o limite tolerável para que esse tipo bactérias não cause prejuízos à saúde?
- Como pode ocorrer a contaminação por tais tipos de bactérias? Como se faz a análise para verificar a qualidade da água? Quais são as exigências das agências nacionais como o Ministério da Saúde, em relação à água mineral.

Uma sugestão para uma possível solução desse problema é desenvolver um modelo matemático para representar a situação e verificar qual quantidade de água mineral (não contaminada) seria necessária acrescentar aos 10 milhões de litros para que a contaminação atinja um nível de concentração que não prejudique a saúde humana.

Poderiam ser explorados modelos baseados em funções afim, exponenciais, ou funções com várias sentenças, considerando a taxa de variação desses tipos de funções. A escolha por um determinado modelo poderá considerar dados de pesquisas científicas (artigos publicados) sobre a taxa de crescimento desse tipo de bactérias em água mineral¹⁰.

O tutor deverá ficar atento aos encaminhamentos dos alunos, pode ser que eles proponham soluções sem considerar conceitos matemáticos, caso isso ocorra, o tutor poderá ressaltar também a importância do tratamento matemático da questão, por meio de questões, por exemplo, qual é a taxa de variação do crescimento da população desse tipo de bactérias em função do tempo? Poderá ressaltar ainda que o uso de um modelo poderá auxiliar na tomada de decisão em relação ao problema

¹⁰ O artigo intitulado "Variação da microbiota natural e de pseudomonas aeruginosa em água mineral não carbonatada embalada em diferentes materiais durante o armazenamento a 30°C ± 1°C" pode ser bastante útil no desenvolvimento do estudo. (Disponível em <<http://dx.doi.org/10.1590/S0101-20611997000200019>>. Acesso em: 02 jan. 2016).

proposto, com previsões ou simulações. Também poderá sugerir o estudo de modelos existentes para o crescimento populacional de bactérias, ressaltando sua importância e limitações perante a situação real.

Esse problema envolve conhecimentos relacionados às áreas de Biologia, Química, Matemática, Medicina, Economia, entre outras, dependendo do tipo de solução que será proposto pelos grupos, após pesquisas e estudos complementares.

Problema 2 – Impactos ambientais causados por poluentes químicos



Figura 3 – Incêndios em tanques de combustível.
Fonte: Retirado de <http://odia.ig.com.br/>

O incêndio que teve início em um dos tanques de combustível de uma indústria, no bairro do Alemoa, cidade litorânea de São Paulo, que gerou diversas explosões em outros tanques causou diversos prejuízos naturais. Os impactos ambientais do incêndio que atingiu seis tanques poderão durar vários anos, contaminando as águas, manguezais, plantas e animais.

Além disso, com a emissão de poluentes na atmosfera, existe a possibilidade de ocorrência de chuvas ácidas, o que comprometeria a vegetação da serra do Mar. Estima-se que bilhões de litros de água que foram usados no resfriamento dos tanques voltaram para o ecossistema aquático com resíduos do combustível e dos produtos químicos que compõem a espuma usada para debelar o fogo.

De acordo com a Companhia Ambiental do Estado (Cetesb), na época do incêndio a quantidade de oxigênio disponível na água foi reduzida dramaticamente e a temperatura subiu 7°C acima do tolerável para os peixes, o que causou a morte de oito toneladas deles.

Realize uma pesquisa para indicar os impactos ambientais causados pelo incêndio relatado no início, e busque desenvolver um modelo matemático para fazer previsões sobre o tempo que será necessário para que os impactos sejam recuperados.

Estudo de apoio para o problema 2¹¹

Para incentivar os estudos dos impactos ambientais causados pelo incêndio descrito na situação anterior, e indicar algumas informações e dados que serão necessários para iniciar tais estudos, vamos propor a análise e resolução do caso de uma Petroquímica que poluiu uma Baía:

A Petroquímica Ltda., companhia especializada no tratamento de resíduos poluentes derramou, acidentalmente, uma grande quantidade do Agente Oleoso na Baía Bonita. Feitas medições após o acidente, concluiu-se que a concentração do Agente Oleoso nas águas da baía era de 10 ppm (partes por milhão).

Na baía existem manguezais que, por sua flora e fauna características, são considerados zonas de proteção ambiental. Infelizmente, não é possível remover por meios mecânicos o Agente Oleoso que polui os manguezais: corre-se o risco de causar danos ainda maiores ao ecossistema local.

Além disso, a pesca na baía constitui o único meio de sobrevivência para diversas colônias de pescadores que vivem ao seu redor. Devido à contaminação dos peixes pelo Agente Oleoso, a pesca na baía foi proibida.

Numa tentativa de ressarcir, em parte, os danos causados ao meio ambiente e o prejuízo sofrido pelos pescadores, moveu-se uma ação popular contra a Petroquímica para o estabelecimento de uma multa a ser investida em Programas de Despoluição da baía e em auxílio às famílias desempregadas.

Após uma cuidadosa análise da situação, cientistas ambientalistas, garantiram que a baía tem uma capacidade de se autodepurar a uma taxa de 20% ao ano. Baseando-se nesta hipótese, estabeleceram, então, o seguinte modelo matemático para a concentração do Agente Oleoso ao longo do tempo:

¹¹ Esse estudo de apoio foi inspirado e adaptado do capítulo 6 do livro *Aprendendo Cálculo com Maple*, de Angela Rocha dos Santos e Waldecir Bianchini. Ano: 2002. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo1/calculo1pdf/capitulo_06.pdf>. Acesso em: 12 maio 2015.

$$p(1) = 10$$

$$p(n+1) = 0,8p(n)$$

(Este é um exemplo de um sistema dinâmico discreto)

Utilize este modelo, para fazer as seguintes previsões indicadas no quadro abaixo:

Ano	Poluente (ppm)						
1		6		11		16	
2		7		12		17	
3		8		13		18	
4		9		14		19	
5		10		15		20	

Quadro 2 – Previsão do total de poluentes ao longo dos anos.
Fonte: Adaptado do livro Aprendendo Cálculo com Maple

A partir dos dados indicados no quadro anterior, construa um gráfico para indicar as previsões calculadas por você:

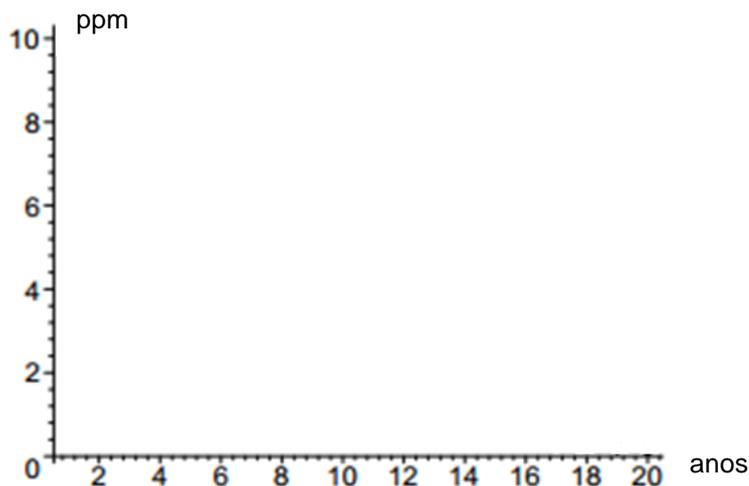


Figura 4 – Gráfico relacionado às previsões (poluentes x anos).
Fonte: Adaptada do livro Aprendendo Cálculo com Maple

Suponha que de posse destes dados, os advogados da Petroquímica, em defesa do seu cliente, alegaram junto ao tribunal que não houve um dano real ao meio ambiente provocado pelo derramamento do Agente Oleoso na baía, porque ao final de algum tempo o nível de poluição da baía retornaria ao seu padrão inicial. Para fundamentar esta linha de argumentação, usaram a fórmula $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 0$, explicando que esta

fórmula traduzia em termos matemáticos precisos o que aconteceria com a concentração do Agente Oleoso ao longo do tempo. Além disso, explicaram também que a fórmula acima significa, matematicamente, que após um certo tempo a concentração do Agente Oleoso ficará muito próxima de zero.

O promotor da ação achou que havia alguma coisa errada nesta história, “justificada matematicamente”, mas não sabia como contestar os argumentos matemáticos apresentados. Uma de suas assistentes chamou atenção para o verdadeiro significado matemático da expressão $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 0$.

A assistente argumentou que, embora depois de muitos anos a concentração do Agente Oleoso realmente se aproximaria de zero, os peixes e o restante da fauna e da flora aquáticas estariam contaminados e impróprios para o consumo. Por este motivo a pesca na baía seria proibida até que a concentração do Agente Oleoso fique abaixo de 2 ppm.

Para fundamentar seu raciocínio apresentou o seguinte gráfico, ilustrativo da situação descrita:

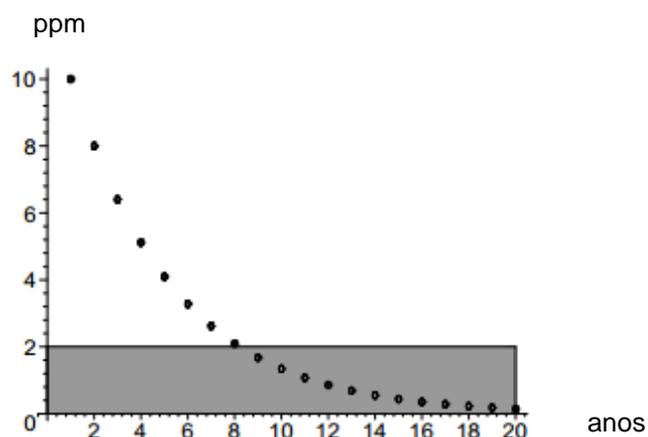


Figura 5 – Previsão da concentração de poluentes ao longo dos anos.
Fonte: Retirado do livro Aprendendo Cálculo com Maple

Assim, pelos dados apresentados pelos ambientalistas e pelo gráfico acima, ela concluiu que transcorreriam oito longos anos até que a baía pudesse ser liberada para a pesca. Propôs, então que fosse cobrada da Petroquímica uma multa de 10 milhões de reais por cada ano em que a pesca estivesse proibida. Pelos dados apresentados, a multa total devida seria de 80 milhões de reais.

Além disso, a assistente da promotoria afirmou que a interpretação matemática dada pelos advogados da Petroquímica estava correta, mas era apenas uma pequena parte da história. O significado mais preciso da expressão $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 0$ é que para qualquer nível de concentração C do Agente Oleoso haverá um tempo T , que pode estar muito, muito longe no futuro, tal que para todo $t \geq T$, isto é, para qualquer tempo posterior, teremos que $|p(n)| < C$.

Dessa maneira, para que a pesca pudesse ser liberada teríamos que ter $C = 2$ ppm e, neste caso, $T = 9$ anos.

O promotor então argumentou que, embora o nível de 2 ppm fosse adequado para a liberação da pesca na baía, a fauna e a flora, especialmente dos manguezais, só se recuperariam completamente quando o nível de concentração do Agente Oleoso ficasse abaixo de 0,5 ppm e apresentou o gráfico a seguir:

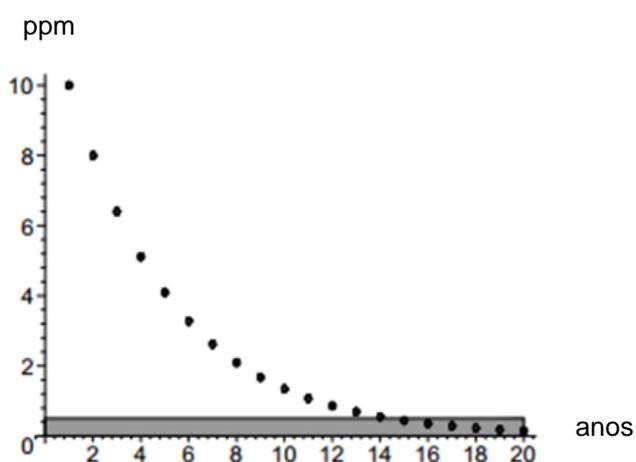


Figura 6 – Nível de concentração do Agente Oleoso no decorrer dos anos.
Fonte: Retirado do livro Aprendendo Cálculo com Maple

Concluindo, então, que este nível só seria atingido quando $t \geq 14$.

Tendo em vista os argumentos apresentados por ambas as partes, o juiz condenou a Petroquímica a pagar uma multa de 140 milhões de reais.

É possível determinar quanto tempo deve-se esperar até que a concentração de poluentes fique abaixo do nível indicado, nos seguintes casos? Em caso afirmativo determine quanto tempo será necessário, em caso negativo justifique.

(a) A concentração atual é de 15 ppm e cai a uma taxa de 30% ao ano. O nível tolerável de poluição é de 0,5 ppm.

(b) A concentração atual é de 15 ppm e cai a uma taxa de 10% ao ano. O nível tolerável de poluição é de 0,1 ppm.

No julgamento acima, apesar de todos os interessados terem concordado com a multa estipulada, muitos especialistas discordaram do nível aceitável de poluição. Para cada um dos especialistas consultados este nível seria de:

- ✓ Para o Especialista A o nível aceitável de poluição é de 12 ppm;
- ✓ Para o Especialista E o nível aceitável de poluição é de 3 ppm;
- ✓ Para o Especialista Q o nível aceitável de poluição é de: 1 ppm;

Qual seria o valor da multa que a Petroquímica deveria pagar levando em conta a opinião de cada um dos especialistas consultados?

Em geral, qual é o nível de poluição aceitável para que seja permitido o contato da água com o corpo humano, por exemplo, para banhar-se?

Ainda em relação ao julgamento, os advogados da Petroquímica apelaram da sentença alegando que a baía já apresentava um nível de poluição antes do derramamento do Agente Oleoso. Supondo que a concentração de agentes poluidores na baía é normalmente de 0,1 ppm, os ambientalistas obtiveram o seguinte modelo matemático para prever a concentração de poluentes ao longo do tempo:

$$p(1) = 10$$

$$p(n + 1) = 0,1 + 0,8(p(n) - 0,1)$$

Este modelo, em vez de levar em conta a quantidade de poluição da baía, estima a diferença entre o nível de poluição atual e o nível de poluição natural 0,1. Em outras palavras, se o nível aceitável é C, a Petroquímica será multada por cada ano no qual $|p(n) - 0,1| \geq C$. Levando em conta este modelo, determine por quantos anos a Petroquímica deverá ser multada se o nível tolerado é de 0,05 ppm.

Orientações Didáticas

No primeiro momento, o tutor poderá retomar algumas considerações a respeito da dinâmica das aulas. O mesmo deve esclarecer que a abordagem PBL será direcionada para trabalhar diversos conceitos além dos matemáticos.

Neste problema há questões associadas à área ambiental, ao entendimento de reações químicas elementares, a problemáticas ligadas à economia, ética, dentre outras. Devem-se promover momentos para análises e reflexões acerca do problema.

O problema é apresentado a cada grupo. Recomenda-se a leitura compartilhada. Mediante a compreensão dos estudantes, o tutor começa a realizar suas inferências, com a intenção de que as primeiras questões de aprendizagem sejam identificadas, solicitando também que indiquem palavras ou termos desconhecidos pelos integrantes dos grupos.

Indagações como: Quais os apontamentos mais relevantes nesse problema? Que conhecimentos o grupo acredita que estejam envolvidos nessa situação? Todas as informações pertinentes aos conteúdos matemáticos foram dadas? Quais dimensões além do campo matemático esse problema possui? Que tipo de ligações existe com as questões profissionais? Que estratégias o grupo pode usar para propor alguma resolução? etc.

Essa fase é crucial na proposta PBL, pois os alunos são confrontados com uma situação nova. Por meio das primeiras discussões realizadas, dos conflitos gerados a partir dessa situação, juntamente com os questionamentos do tutor e dos membros do próprio grupo, desequilíbrios cognitivos podem surgir, e então é necessário analisar que conhecimentos já existem a respeito dessa situação. Ou seja, trabalha-se com um levantamento de informações prévias e com a identificação de questões de aprendizagem (de ordem conceitual, social e psicológica).

A partir dessa primeira mediação, o tutor pode listar quais são os conhecimentos já adquiridos por esses alunos e como os mesmos interagem entre si. Logo, serão realizadas orientações a respeito das indagações. Dessa forma, há como identificar quais variáveis são elementares no problema e quais provavelmente serão adotadas para que estudos complementares possam contribuir para sua resolução.

Explicações iniciais realizadas pelos grupos são interpretadas como hipóteses. E estas, por sua vez, precisam ser investigadas. Assim, estudos referentes ao problema precisam ser aprofundados. As primeiras ideias envolvendo planos de ação começam a aparecer: Quais conhecimentos são necessários para que o problema seja resolvido? A respeito das questões ambientais, jurídicas, éticas, que aspectos precisam ser inevitavelmente considerados? O que vocês acreditam que está implícito nessa situação?

Na proposta PBL, é necessário ter uma visão holística a respeito da análise e interpretação do problema. Os grupos devem, então, estabelecer suas prioridades de estudos e seus objetivos de aprendizagem, pois afinal, nesta metodologia de ensino, espera-se que os próprios estudantes mobilizem seus conhecimentos.

Todo esse processo envolve a mediação do tutor. Após a delegação de tarefas, em parcerias ou de forma individual, e com o apontamento de alguns planos de ação, pode-se propor a realização de um relatório do encontro ao final dessa reunião.

O problema em questão envolve noções de Limites. Como sugestão de trabalho, o tutor pode propor referências bibliográficas a respeito do assunto; incentivar as relações de ajuda mútua para compreender conceitos; fornecer outros materiais de estudo complementares; disponibilizar espaços para que os estudantes aprofundem seus conhecimentos (bibliotecas, salas de monitoria, plantão de dúvidas), entre outras formas de estudo. Durante a dinâmica do PBL, o tutor pode também realizar encontros com uma característica mais expositiva a respeito dos principais conceitos, sem infringir a autonomia dos estudantes.

Ao trazer para discussão algo sobre limite, como a compreensão da expressão $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 0$, por exemplo, os alunos precisarão ter em mãos os recursos e pesquisas que realizaram sobre o assunto. O intuito é que, de modo autônomo, os estudantes mobilizem seus conhecimentos, verificando o que compreenderam, identificando suas concepções sobre o assunto. Seus registros e análises realizadas devem ser amplamente discutidos.

Esse é o momento para que se aborde a importância da Matemática aplicada a situações realísticas; que se evidencie o quanto certos conhecimentos são relevantes.

No problema em questão é possível identificar conhecimentos prévios a respeito da análise de tabelas e gráficos, e suas interpretações sobre o comportamento das funções dadas.

Como questionador e provocador, o tutor poderá retomar o problema e os gráficos construídos, permitindo que os alunos percebam o que acontece com a concentração de poluentes à medida que os anos se passam. Para isso, sugerimos alguns questionamentos: O que significa a afirmação “Após um certo tempo a concentração do Agente Oleoso ficará muito próxima de zero”? Como esta frase se relaciona com os gráficos? É verdadeira a ideia de que os valores da concentração de poluentes irão zerar em algum momento? Matematicamente, como isso pode ou não ser refutado?

A fim de discutir a definição matemática sobre limites, o tutor pode também explorar graficamente a definição desse conceito, fazendo-o de forma coletiva, o com o intuito de clarificar possíveis incompreensões iniciais.

Com essa etapa de esclarecimentos e discussões, novos estudos devem ser encaminhados. Surgem rediscussões entre os participantes e busca-se integrar as ideias matemáticas ao problema dado. Após os estudos necessários e indicados (o que pode se concretizar ao longo de vários encontros, dependendo da ênfase dada ao problema, das orientações fornecidas pelo tutor, do cronograma e da flexibilidade das aulas, do trabalho e interpretação dos membros da equipe, dentre outros fatores), os estudantes devem apresentar quais as propostas de soluções para o problema analisado.

Essa fase pode ser feita mediante sugestões de soluções apresentadas ao tutor, a partir de suas mediações em cada grupo. Consequentemente, as estratégias de resolução e desenvolvimento de todo percurso, podem ser apresentadas à turma de modo geral – com a adoção de recursos audiovisuais, exposição de trabalhos/projetos, explanação dos modelos projetados. Os discentes têm a oportunidade de rever suas considerações e de analisar os argumentos utilizados para defendê-las. Há uma formulação geral a respeito dos conceitos matemáticos envolvidos e das propostas de soluções para o problema dado. Logo, faz-se necessário validá-las.

Com os questionamentos dos demais integrantes da sala e apontamentos feitos pelo tutor, e outros integrantes do processo de avaliação (professores de outras áreas, por exemplo), é possível verificar a viabilidade das soluções apresentadas. Modificações podem ser realizadas, caso haja necessidade. E, com isso, ocorrem os processos de avaliações, descritos anteriormente. Para que isso seja ainda mais eficaz, o tutor deve oportunizar aos estudantes uma participação efetiva, de modo que percebam suas atuações ao longo do processo, seu desempenho, seu compromisso com a equipe, evolução ao longo da dinâmica, dentre outras observações.

A adoção e adaptação do problema abordado tem como objetivo colaborar com a formação de profissionais que de alguma forma atuem em questões relacionadas ao meio ambiente. Sendo este o caso, esse profissional precisa estar dotado de uma base sólida de conhecimentos teóricos e práticos ligados a diferentes áreas, como Matemática, Física, Química e Biologia, contemplando também uma visão crítica e global de aspectos políticos, econômicos, sociais e culturais.

Problema 3 – Projetando embalagens em forma cilíndrica¹²

Diversas indústrias de produtos alimentícios utilizam embalagens de lata em formato cilíndrico para comercializar seus produtos.

A produção de latas (que são utilizadas para armazenar ervilhas, extrato de tomate, óleo de soja, leite condensado, leite em pó, etc.) busca adotar técnicas para obter algumas otimizações, por exemplo, minimizar as perdas de materiais, de custos e atrasos ou maximizar os lucros. Diante de tais necessidades, surgem certas indagações:



Figura 7 – Alimentos dentro de latas.
Fonte: <http://nutriatualidades.blogspot.com.br>

Como cortar a matéria-prima, no caso metal, de forma a obter a maior quantidade possível de unidades e a menor quantidade de rejeitos?

Suponha que você seja contratado por uma Empresa de Produtos Alimentícios, com o intuito de colaborar com o processo de fabricação de embalagens referentes às latas de extrato de tomate, em formato cilíndrico, procurando reduzir seus gastos e minimizar perdas de material.

Sua primeira tarefa será maximizar o volume da lata de extrato de tomate. Sabendo-se que a Empresa compra da CSN (Companhia Siderúrgica Nacional) chapas de folha-de-flandres retangulares, você deverá determinar dimensões ótimas da chapa que resultam no maior volume da lata, supondo que o volume seja conhecido.

¹² Esta situação foi inspirada e adaptada de alguns sites que contemplam a área de Mecânica e de Pesquisas Operacionais. Disponíveis em: <<http://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo=matematica-ajuda-industria-fazer-cortes-pacotes-perfeitos&id=010170100219#.VrO7Thar TIW>> e <http://www.sobrapo.org.br/o_que_e_po.php>. Acesso em: 01 ago. 2015.

Como você pode determinar a forma mais econômica dessa lata (adotando-se o volume V), estabelecendo relações entre a altura h e o raio r que minimize o custo do material usado?

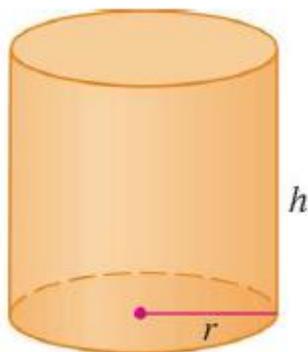


Figura 8 – Formato da lata.
Fonte: Fecha de entrega de proyecto¹³

Será que na prática, as latas produzidas e comercializadas realmente seguem com rigor às proporções encontradas, como isso pode ser verificado? Como explicar os resultados encontrados na questão anterior?

Estudo de apoio para o problema 3¹⁴

Buscando explicar os fenômenos observados no item anterior. São feitas as seguintes considerações:

O material para fazer as latas é cortado de folhas de metal. Os lados cilíndricos são formados por retângulos: esses retângulos são cortados da folha com uma ou nenhuma perda. Mas se os discos do topo e da base forem cortados de quadrados de lado $2r$ (figura 9), isso leva a uma considerável perda de metal, que pode ser reciclado, porém tem um pequeno ou nenhum valor para quem fabrica as latas. Se for esse o caso, encontre qual é a relação entre h e r (figura 8).

¹³ Esta ilustração, assim como as figuras 9 e 10, foi retirada de uma ficha de entrega de projeto (*Fecha de entrega de proyecto*), a qual fez parte das aulas de Matemática Básica 2, da Facultad de Ingeniería da Universidad de San Carlos de Guatemala, em 2014. Disponível em: <http://mate.ingenieria.usac.edu.gt/archivos/Proyecto2_103-1-00-2014_MB2-1s.pdf>. Acesso em 06 fev. 2016.

¹⁴ A atividade de apoio ao estudo para o problema 3 foi extraída e adaptada do livro de James Stewart, em relação às aplicações de derivadas. STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, v. 1, 2006.

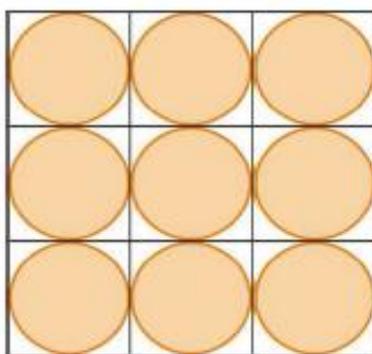


Figura 9 – Discos cortados em quadrados.
Fonte: Fecha de entrega de proyecto

Uma maneira mais eficiente de obter os discos é dividir a folha de metal em hexágonos e cortar as tampas e bases circulares dos hexágonos (figura 10). Encontre qual é a relação entre h e r se for adotada essa estratégia.

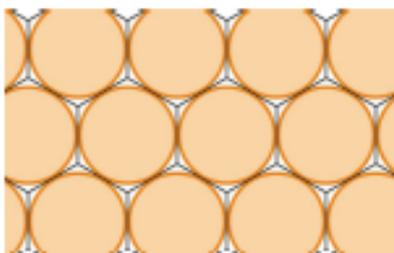


Figura 10 – Discos cortados em hexágonos.
Fonte: Fecha de entrega de proyecto

Ao realizar os cálculos necessários, provavelmente os valores numéricos que serão encontrados para a razão h/r estarão próximos daqueles que realmente ocorrem nas prateleiras do supermercado, mas eles ainda não levam em conta tudo.

Se examinarmos mais de perto uma lata, veremos que a tampa e a base são formadas de discos com raio maior que r , que são dobrados sobre as laterais da lata. Se levarmos em conta isso, deveremos aumentar o valor numérico da razão h/r .

Mais significativamente, além do custo do metal, devemos incorporar o custo de manufatura da lata. Vamos supor que a maior parte da despesa esteja em juntar os lados para formar as latas. Se cortarmos os discos a partir de hexágonos (figura 10), vamos considerar que o custo foi dado e será proporcional a relação:

$4\sqrt{3}r^2 + 2\pi h + k(4\pi + h)$, onde k é recíproco do comprimento que pode ser associado ao custo de uma unidade de área de metal.

Dessa forma, mostre que essa expressão é minimizada quando:

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\frac{\pi h}{r} - 4\sqrt{3}}}$$

Após a explicação de tais fenômenos e dando continuidade aos estudos sobre o projeto solicitado pela Empresa, aplique seus conhecimentos à seguinte situação¹⁵:

“Em uma das etapas do processo de produção da massa de tomate, a polpa já processada é mantida em um recipiente cilíndrico. Para retirar completamente a polpa de dentro desse recipiente, pelo orifício inferior, são utilizadas duas pás acopladas a um eixo que corta o centro do cilindro. Para esvaziar completamente o recipiente, a pá imediatamente ao lado do orifício é mantida fixa, enquanto a outra executa uma revolução completa no sentido anti-horário. Seguindo a sua política de minimizar custos, a Empresa decidiu usar chapas de mesmo material utilizado nas latas, mantendo o perímetro de 36 cm.”

Sua tarefa agora é calcular o maior volume do recipiente onde será guardada a polpa, tendo como base a chapa referida.

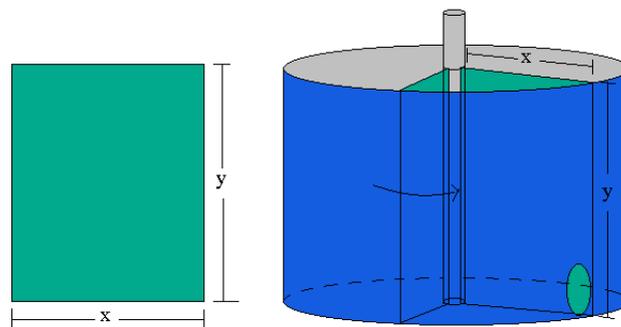


Figura 11 – Esquema da chapa utilizada.
Fonte: Retirada do projeto E-cadernos de Cálculo I

¹⁵ Esta situação foi adaptada do Projeto *E-cadernos de Cálculo I*, da Universidade de Brasília – UnB. O projeto foi realizado no segundo semestre de 2002, sobre o monitoramento do prof. Marcus Vinícius A. Moreira. Disponível em: <<http://www.mat.unb.br/grad/aulas/cadernos/calculo1/projetos/projeto1.html>>. Acesso em: 25 jul. 2015.

Para a fabricação de embalagens metálicas, diferentes tipos de chapas de metal são utilizadas, como a folha de flandres, a folha cromada, folha stancrom e folha não revestida.



Figura 12 – Embalagens metálicas.
Fonte: Retirado de www.agroevento.com

Em que consistem as diferenças de um material para outro, do ponto de vista de conhecimentos químicos?

Que vantagens fazem com que existam muitas embalagens de metal no mercado?

Por que se utiliza folha cromada ao invés de folha de flandres em certos casos?

Orientações didáticas

A gestão da sala de aula se dará de modo análogo aos problemas anteriores, adotando-se determinadas particularidades.

Inicialmente deverá ser feita a apresentação do problema dado e mobilização dos grupos contemplando ideias sobre otimização de lucros e a relevância desse assunto na área de atuação profissional, considerando cursos de graduação que envolvam Gestão de Produção, Economia ou questões relacionadas às áreas de Química, Biologia, entre outros.

As seguintes questões poderão complementar a dinâmica inicial da tutoria: Quais devem ser os materiais mais adequados para se produzir as embalagens? De que forma um profissional pode realizar algumas previsões em relação ao custo-benefício? Que estratégias podem ser adotadas a fim de se obter as dimensões ótimas da chapa? Quais conhecimentos voltados a essa área devem ser indicados como prioritários? É possível identificar os conceitos matemáticos envolvidos no problema

apenas com a leitura do mesmo? Em relação ao volume dado e a determinação de cálculos de áreas de superfícies, que conceitos estudados em momentos anteriores devem ser explorados?

Ainda no momento inicial deverão ser realizados diálogos entre os membros da equipe a respeito das primeiras reflexões; delegação das tarefas e dos planos de ação; registro das informações imprescindíveis e destaque para a atuação do coordenador e do relator.

No segundo momento (em outros encontros) serão discutidas e analisadas as informações e materiais obtidos. Sugestivamente questiona-se se “as informações que os estudantes conseguiram na delegação das primeiras tarefas são viáveis”? Houve material de estudo referente às abordagens matemáticas em questão, como taxa de variação e otimização?

Será fundamental a realização de constantes mediações por parte do tutor: direcionamentos dos grupos; sugestão de materiais de estudo e recursos de apoio (textos, trabalhos acadêmicos a respeito do assunto, livros didáticos, exemplos de aplicação).

De posse dos materiais de estudos analisados ou organizados, surge o compartilhamento de informações entre os integrantes de cada grupo. Se cada equipe estiver efetivamente pesquisando os dados elementares à resolução do problema, será possível que realizar relatórios envolvendo questões gerais a respeito da produção das embalagens e pode-se (conforme estiver no planejamento do tutor) propor um estudo específico dos conceitos matemáticos envolvidos. Caso isso não ocorra, o tutor poderá sugerir como encaminhamento o estudo de derivadas e suas aplicações em problemas que envolvem otimização. Pode-se orientá-los para a realização de estudos individuais e/ou coletivos sobre: definições de conceitos; noções a respeito das principais regras de derivação; relações pertinentes aos valores de máximos e mínimos e às aplicações ao problema apresentado.

A parte referente ao estudo de apoio dada neste problema tem o intuito de contribuir com o processo de aprendizagem. Com essa proposta podem ser explorados conhecimentos sobre áreas de superfícies, otimizações e moldes dos recortes de embalagens.

O tópico referente a verificação das dimensões de embalagens cilíndricas encontradas nas prateleiras dos supermercados é viável. Nessa etapa, o tutor pode propor que os alunos realmente façam os testes na prática; que analisem diferentes embalagens, comparando os valores encontrados apenas por meio de medições usuais com os cálculos feitos através da aplicação do conceito de derivadas. Assim, é possível construir argumentos válidos que justifiquem as relações existentes entre raio e altura de embalagens cilíndricas.

Mediante essa proposta, os conhecimentos podem ser ampliados, pois há como abordar também questões envolvendo o custo da manufatura, a degradação (oxidação) de determinados tipos de materiais e outras relações matemáticas que se fundamentam nos conhecimentos sobre derivadas, além de questões relacionadas à sustentabilidade.

Problema 4 – Produção de citricultura¹⁶



Figura 13 – Produção de laranjas.
Fonte: Retirado de www.rankdobrasil.com.br

Setor altamente organizado e competitivo, a citricultura é uma das mais destacadas agroindústrias brasileiras. Responsável por 60% da produção mundial de suco de laranja, o Brasil é também o campeão de exportações do produto.

O cultivo de laranja no Brasil se divide em dois períodos distintos. O primeiro, de 1990 a 1999, se caracteriza pelo aumento da produção e conquista da posição de líder do setor. O segundo, a partir de 1999, é o período de consolidação da capacidade e desempenho produtivo. São colhidas, anualmente no País, mais de 18 milhões de toneladas de laranja ou cerca de 30% da safra mundial da fruta.

Para manter a liderança do setor, o Ministério da Agricultura investe no apoio a adoção de sistemas mais eficientes, como a produção integrada, com medidas para reduzir os custos, aperfeiçoar e ampliar a comercialização do produto. O Ministério tem, ainda, ação efetiva na fiscalização e prevenção ao aparecimento de pragas e doenças. O Estado de São Paulo é responsável por 74% desse total (IBGE – 2012).

Atualmente as informações configuram-se, cada vez mais, como essencial para a gestão, tomada de decisão e sucesso em uma atividade econômica. Na citricultura paulista, na última década, mudanças intensas foram registradas, com acentuados impactos em tecnologia, custo de produção, receita e rentabilidade. Essa evolução

¹⁶ Este problema foi inspirado em sites ligados à produção de laranjas no Brasil e análises sobre Agronegócios. Disponíveis em <http://www.agricultura.gov.br/vegetal/culturas/citrus> e <http://www.investe.sp.gov.br/setores-de-negocios/agronegocios/laranja/>. Acesso em 05 set. 2015.

contribuiu para agravar ainda mais a crônica carência de dados estatísticos e econômicos da cadeia citrícola.

Que tipo de informações a respeito da citricultura está disponível? A partir de tais informações é possível fazer algum tipo de previsão considerando os próximos anos? Quais aspectos interferem diretamente na produção de sucos de laranja?

Tratando-se de aspectos ligados à Economia, é possível identificar a taxa de variação do custo total quando x unidades são produzidas. De que forma a compreensão de conceitos matemáticos podem contribuir para a compreensão dos aspectos econômicos de um citricultor?

Orientações didáticas

A situação acima poderá ser proposta em cursos de graduação que estejam relacionados à formação de profissionais que atuem em Agronomia, Economia, Produção, entre outros.

Dispondo os alunos em grupos e tendo como intenção evidenciar aspectos vinculados à nossa realidade e à economia do país, o tutor pode sugerir a leitura e análise do texto que segue.

Texto complementar:

Sistema de produção de citros & importância econômica

“A história da citricultura brasileira está intimamente ligada à própria história do país. Poucos anos após a descoberta do Brasil, entre 1530 e 1540, os portugueses introduziram as primeiras sementes de laranja doce nos Estados da Bahia e São Paulo. Dadas às condições ecológicas favoráveis, as plantas produziram satisfatoriamente, a ponto de os frutos da laranja ‘Bahia’ serem reconhecidas ainda no Brasil Colônia como maiores, mais sucosos e de excelente qualidade do que os produzidos em Portugal. Mas, somente a partir dos anos 30 do século passado, a citricultura começou a ser implantada comercialmente nos Estados de São Paulo, Rio de Janeiro e Bahia, tendo apresentado maiores índices de crescimento nos estados do Sudeste e Sul.”

A citricultura brasileira apresenta números expressivos que traduzem a grande importância econômica e social que a atividade tem para a economia do país. Alguns desses números são mostrados concisamente: a área plantada está ao redor de 1 milhão de hectares e a produção de frutas supera 19 milhões de toneladas, a maior no mundo há alguns anos. O país é o maior exportador de suco concentrado congelado de laranja cujo valor das exportações, juntamente com as de outros derivados, tem gerado cerca de 1,5 bilhão de dólares anuais. O setor citrícola brasileiro somente no Estado de São Paulo gera mais de 500 mil empregos diretos e indiretos.

A Região Nordeste responde por 9% da produção nacional, constituindo-se na segunda maior região produtora do país, com mais de 110.000 hectares cultivados e mais de 1,5 milhões de toneladas. Dentre os estados produtores, o destaque fica com os estados Bahia e Sergipe, respectivamente segundo e terceiro produtores nacionais, que representam juntos 90% de toda área plantada. A citricultura nordestina tem grande potencial para implementar seu crescimento sobretudo em função da ausência de doenças e pragas de grande importância que se encontram distribuídas no Sudeste, maior centro produtor. No que diz respeito ao incremento e geração de empregos, percebe-se que devido à instalação de muitas casas de embalagens (packing-houses) e aumento da exportação do limão tahiti para o Mercado Europeu, muitos empregos diretos e indiretos têm sido oferecidos, na ordem de 100 mil. ”

*Claudio Luiz Leone Azevêdo
Embrapa, dez 2003*

Esse material pode instigar a curiosidade dos alunos, promover discussões e incentivar o levantamento de alguns pontos relevantes, como: apontar necessidades das empresas ligadas ao ramo de citriculturas; investigar alguns impactos econômicos que esse setor representa ao país; denotar alguns impactos na sociedade em relação a geração de lucros, da receita e da criação de empregos, dentre outros.

Essa dinâmica associada a outras informações levantadas pelos demais grupos seriam apresentadas de modo coletivo, usando esquemas, palavras-chave, mapas

conceituais, etc. A partir desse momento, começam os trabalhos de análises e discussão do problema em si.

O tutor tem o papel de conduzir esse processo: Que visão o grupo tem em relação ao problema e às suas aplicações profissionais? A equipe possui conhecimentos sobre funções marginais? Como levantar informações sobre os temas que estão implicitamente relacionados com o problema, em especial as taxas de variação (taxa de variação envolvendo produção, custo, lucro e receita)? De que formas há impactos econômicos desse tipo de situação à nossa sociedade? Que conceitos matemáticos há por trás das diferentes questões desse problema (como a relação entre a quantidade de produtos a serem produzidos e a mão-de-obra necessária)?

Possivelmente ocorrerão reencontros das equipes de trabalho, etapas nas quais há elaboração de estratégias de ação e seleção de referências complementares. Será possível elaborar roteiros de estudos ligados às necessidades das empresas/indústrias nesse caso e planejamentos voltados ao campo matemático.

Em relação à matemática, espera-se que os grupos percebam o quanto o trabalho com funções marginais está ligado ao conceito de derivadas e integrais. Deseja-se que haja uma gama de conhecimentos prévios essenciais ao desenvolvimento dos novos assuntos a serem trabalhados, como: análise e interpretação de funções no cotidiano; a compreensão de taxas de variação; a leitura e interpretação de gráficos; manipulação algébrica; e escolha do modelo matemático.

Tanto os alunos quanto o tutor poderiam observar se há domínio em relação a esses conhecimentos. Caso existam lacunas, planos de estudos paralelos podem ser indicados, a fim de retomar conceitos. Ao longo dos encontros e dos estudos individuais, que também são necessários, os alunos podem trocar suas experiências e se ajudar mutuamente.

A partir dessas orientações, os grupos provavelmente encontrarão referências ligadas a Matemática Aplicada às áreas Econômica e Administrativa. O tutor tem a incumbência de fornecer outras sugestões que contribuam para esse roteiro de estudos. Vincular o problema às ideias sobre o comportamento de funções e taxa de variação será fundamental.

É possível que ocorra uma abertura para o tutor realizar ponderações a respeito do campo matemático, principalmente quando se tratar de definições e regras de derivação/integração. Outro caminho é que o tutor proponha aos alunos a pesquisa de alguma definição ou técnica a ser usada e que, de modo voluntário, expliquem o que compreenderam a respeito do assunto. Ou seja, os estudantes agirão de forma independente, mesmo com a atuação do tutor, podendo fazê-lo com o apoio dos recursos disponíveis: lousa, computadores, livros didáticos, entre outros.

Com a proposta de estudos finalizada, os estudantes partem então para os processos de resolução do problema em si, atrelando suas aprendizagens com seu campo de atuação profissional. E as etapas posteriores ocorrem conforme detalhamos nas abordagens gerais do processo do PBL.